

ベクトル数学の基礎

電磁気学で利用するベクトル演算の復習

藤田広一： 電磁気学ノート コロナ社

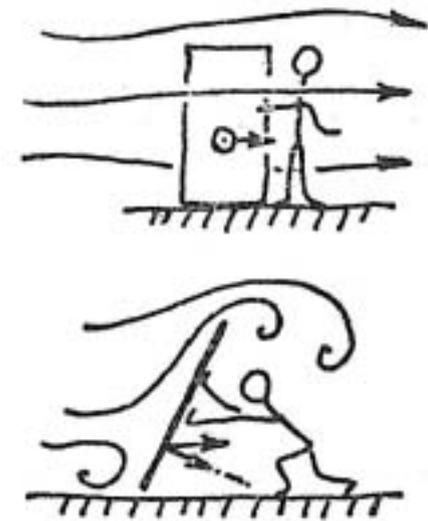
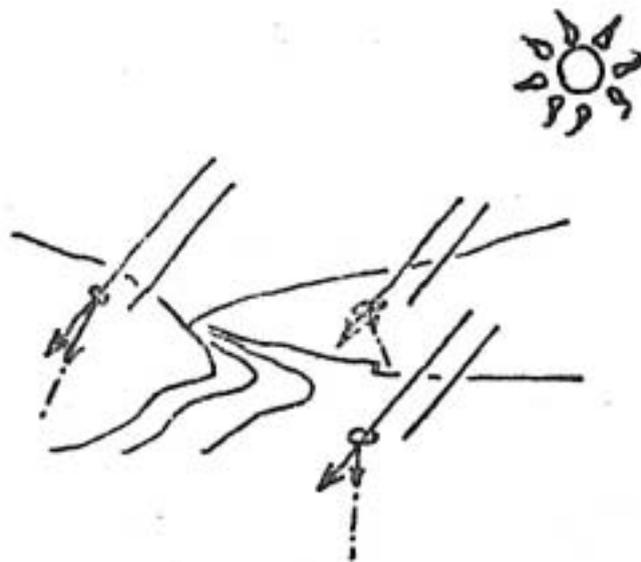
理解しておくべき内容

1. ベクトルの線積分
2. ベクトルの面積分
3. $\text{grad}V$
4. $\text{div}D$
5. $\text{rot}H$
6. ガウス(Gauss)の法則
7. ストークス(Stokes)の法則
8. ベクトルの内積
9. ベクトルの外積

ベクトルの内積

ベクトルの内積は有効成分を表す

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{T} = |\mathbf{E}| |\mathbf{T}| \cos \theta$$



ベクトルの線積分

g :重力場

T :移動する方向の単位ベクトル

重力場内で移動する物体に対する重力の仕事

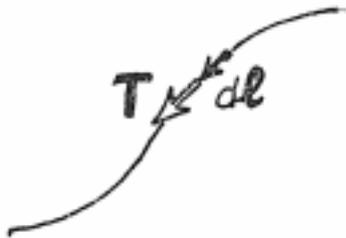
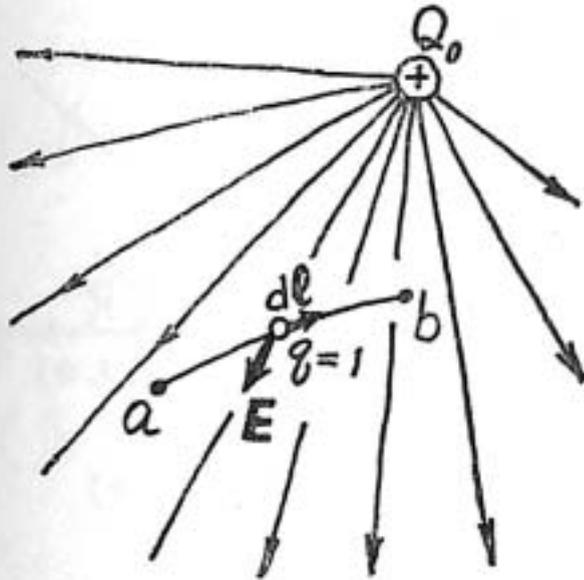


図 2.21 微小変位ベクトル dl

$$\int_a^b \mathbf{g} \cdot \mathbf{T} dl = \int_a^b \mathbf{g} \cdot d\mathbf{l}$$

電界中の電荷の運動と仕事



$$V = -\int_a^b qE \cdot dl$$

$$E = -gradV$$

図 2.22 電界内の電荷の
運動と仕事

gradV

$$\mathit{grad}V = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{k}$$

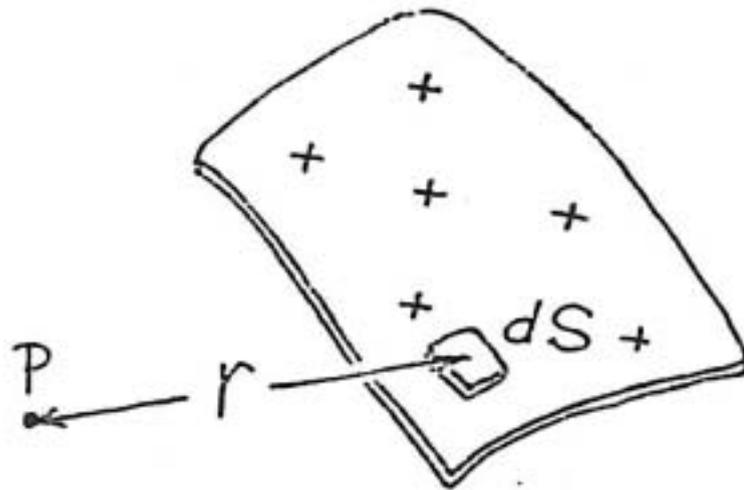
大きさはVの最急傾斜

方向は最急傾斜の方向 であるベクトル

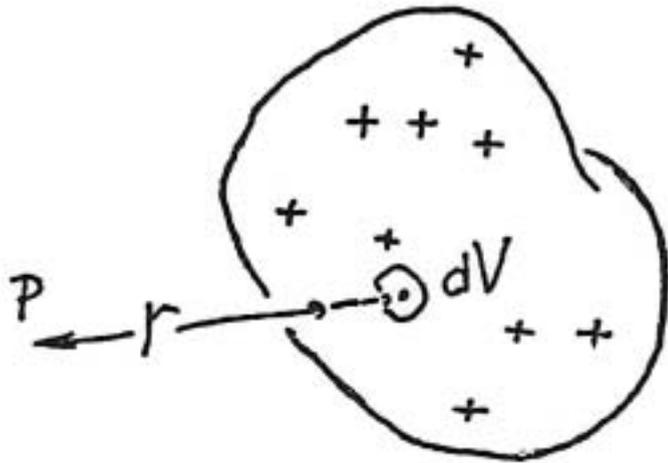


スカラー関数の面積分

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{Q}{r} dS$$



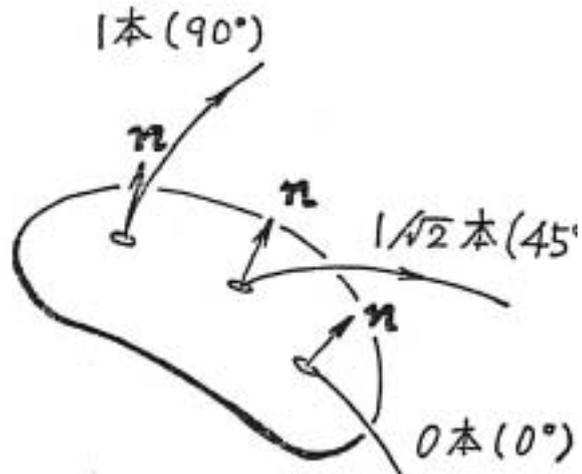
スカラー関数の体積積分



$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{Q}{r} dS$$

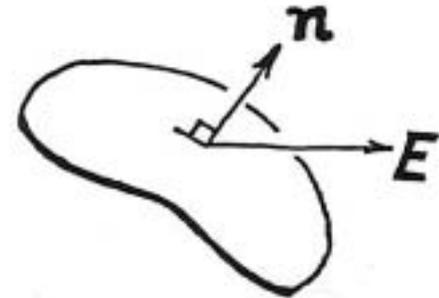
図 3.9 雲状に分布する電
荷による電位

ベクトルの面積分



ベクトルは面に対して任意の方向をもつ

法線ベクトル:
Normal vector

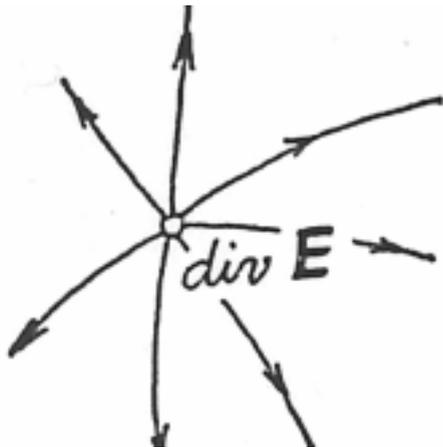


面積分の定義

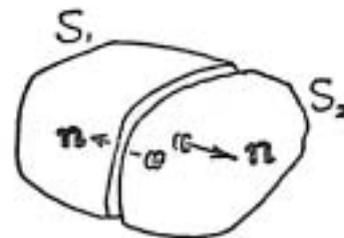
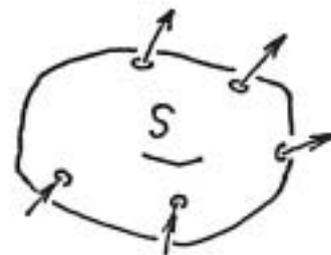
$$\iint \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS$$

閉曲面を貫く電気力線

電荷によってつくられる電界
を電気力線で表現する

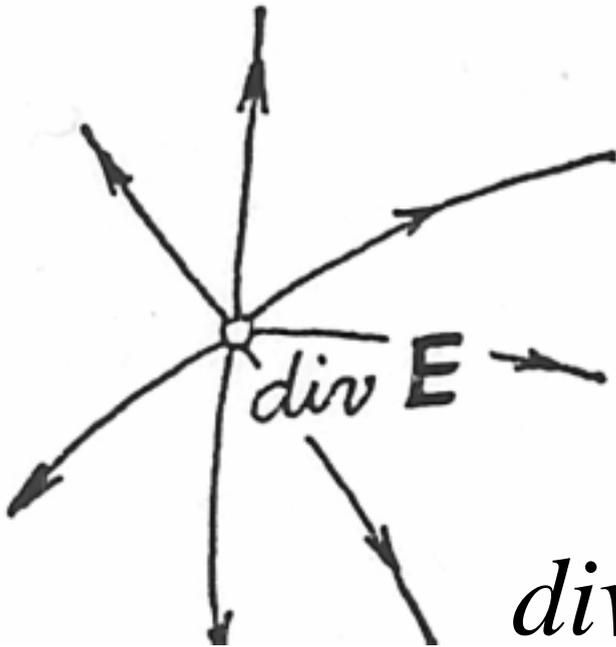


閉曲面を貫く電気力線
の数を数える



$\text{div}D$

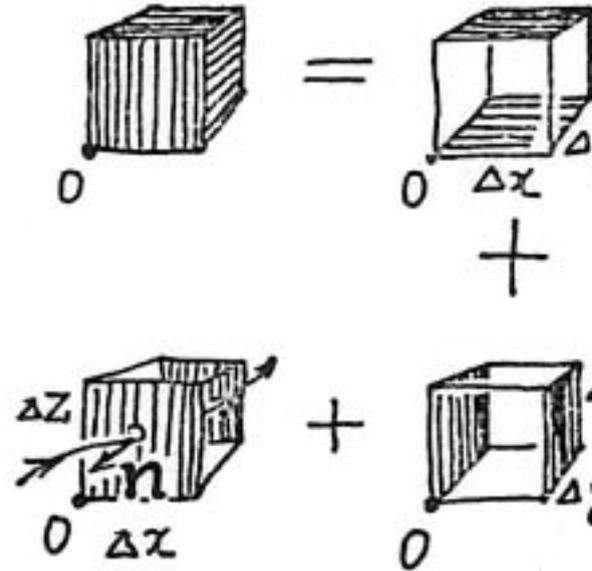
発散 (湧き出し) = (閉曲面から出る力線の総数)
(閉曲面につつまれる体積)



$$\text{div}D = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\iint D \cdot n dS}{\Delta V}$$

$\text{div} \mathbf{D}$

$$\begin{aligned} \text{div} \mathbf{D} &= \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\iint \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS}{\Delta V} \\ &= \lim_{\Delta x \Delta y \Delta z \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta x \Delta y \Delta z} \\ &= \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \end{aligned}$$



ガウスの法則

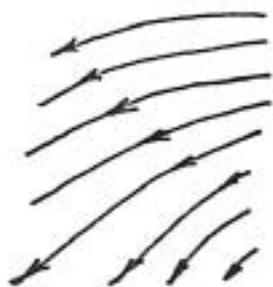
体積 V をとり囲む閉曲面 S について

$$\iint_{S_0} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{D} dV$$

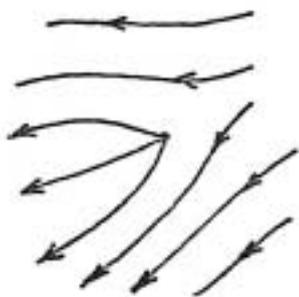
湧出：発散の意味

ベクトル場

Div(泉) と rot(うず)



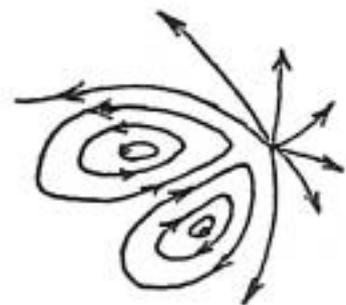
(a) 泉なし
うずなし



(b) 泉あり
うずなし



(c) 泉なし
うずあり



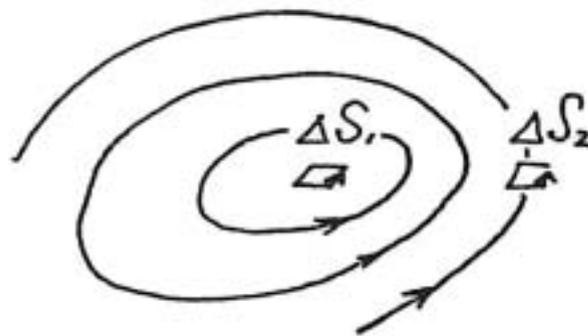
(d) 泉あり
うずあり

図 6.1 ベクトル場の種類

うずメータ



うずメータ



うずの大きさ

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint H \cdot dl}{\Delta S}$$

ローテーションの定義

大きさ

$$|\mathit{rot}\mathbf{H}| = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S}$$

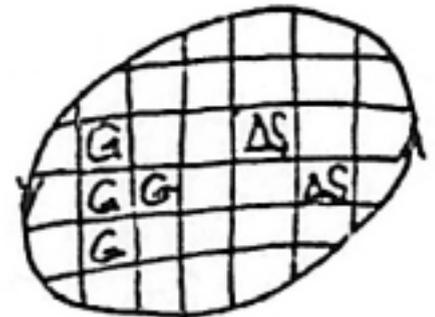


ΔS の周囲について右ネジの進む方向

ストークスの定理

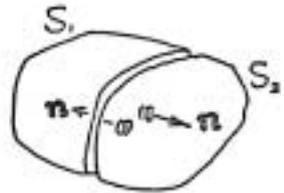
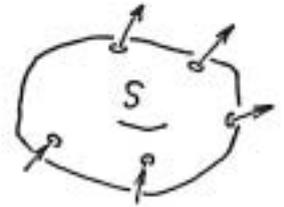
閉曲線 C と C に囲まれた閉曲面 S について

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S (\text{rot} \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS$$

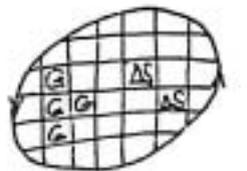


ガウスの法則とストークスの法則

$$\iint_{S_0} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{D} dV$$



$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S (\operatorname{rot} \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS$$



微分形と積分形の変換

いずれも積分の次元をひとつ下げる