7　時間的に変動する電場と磁場

7.1　電荷保存則と変位電流

時間変動　の無い場合の電磁界に関して成立する法則

$$div\mathbf{D} = \rho$$
$$div\mathbf{B} = 0$$
$$rot\mathbf{E} = 0$$
$$rot\mathbf{H} = \mathbf{i}$$

　このうち時間変動があっても成立する法則、成立しない法則がある。

電荷が時間変化するとき発生する電界も変動するから

$div\mathbf{D}(\mathbf{x},t) = \rho(\mathbf{x},t)$ は時間変動場に対して成立。

磁荷は存在しないから

$div\mathbf{B}(\mathbf{x},t) = 0$ も時間変動場に対して成立。

電流電荷連続の式

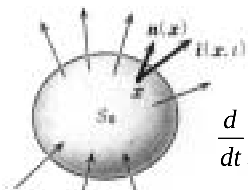

図 7.1　電荷保存則

$$\frac{d}{dt}\int_{V_0} \rho(\mathbf{x},t)dV = \int_{S_0} i_n(\mathbf{x},t)dS$$

$$-\frac{\partial\rho(\mathbf{x},t)}{\partial t} = div\mathbf{i}(\mathbf{x},t)$$

電荷保存則（電流・電荷連続の式）

　コンデンサに蓄えられた電荷が時間変化するとき、電荷は電流として流れ出す。

$$-\frac{dQ(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{V_0} \rho(\mathbf{x},t)dV = \int_{S_0} i_n(\mathbf{x},t)dS = I(t)$$

：電荷保存則

ベクトルに関するガウスの法則より

$$-\frac{\partial\rho(\mathbf{x},t)}{\partial t} = div\mathbf{i}(\mathbf{x},t)$$

：電荷保存則の微分形

（定常電流においては　$div\mathbf{i}(\mathbf{x},t) = 0$　）

電流電荷連続の式

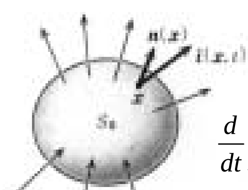

図 7.1　電荷保存則

$$\frac{d}{dt}\int_{V_0} \rho(\mathbf{x},t)dV = \int_{S_0} i_n(\mathbf{x},t)dS$$

$$-\frac{\partial\rho(\mathbf{x},t)}{\partial t} = div\mathbf{i}(\mathbf{x},t)$$

アンペールの法則と電流電荷連続の式の矛盾

アンペールの法則が時間変化がある場合についても成立する、つまり $rot\mathbf{H}(\mathbf{x},t) = i(\mathbf{x},t)$ と仮定する。

両辺の div をとると、ベクトル公式 $div(rot\mathbf{A}) = 0$ より、

$$div(rot\mathbf{H}(\mathbf{x},t)) = 0 = div\mathbf{i}(\mathbf{x},t)$$

となるため、電流・電荷連続の式に反する結果となる。

この矛盾を解決するためにアンペールの法則を拡張し、

$$rot\mathbf{H}(\mathbf{x},t) = \mathbf{i}(\mathbf{x},t) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{x},t)}{\partial t}$$

とすれば電荷保存則を満たす。

アンペールの法則が時間変化があ

アンペールーマックスウエルの法則

$$rot\mathbf{H}(\mathbf{x},t) = \mathbf{i}(\mathbf{x},t) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{x},t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{x},t)}{\partial t}$$

マックスウエルによって新たに導入された変位電流密度

ファラデーの電磁誘導の法則

$rot\mathbf{E} = 0$ は時間変動のある場合どうなるか。
エルステッドにより電流が磁場をつくることが発見された。
ファラデーは磁場が電流を作ると予想し実験を行った。

実験の結果コイルに発生する起電力 $\phi^{e.m.}$ が $\phi^{e.m.} = -k\dfrac{d\Phi}{dt}$ によって定まることを発見した。

ただし磁束 $\Phi = \int_S B_n(\mathbf{x},t)dS = \int_S \mathbf{B}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{n}dS$

はコイル C_0 で囲まれた任意の曲面 S に対して定義される。
どの曲面でも成立することは $div\boldsymbol{B} = 0,\ \iint_{S_0} \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}dS = 0$ によって保証される。

レンツの法則

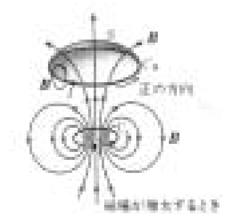

図7.1 ファラデーの電磁誘導の法則

コイルを鎖交する磁束 Φ が発生する起電力は、鎖交磁束をうち消す方向の磁束を発生する電流をコイル上に流す

ファラデーの電磁誘導の法則

コイルに電流が発生するのはコイルを構成する導体内部に電界が発生し自由電子を動かすからである。

起電力は単位電荷になす仕事として定義される。コイル一周についてなす仕事の総量は

$$\phi^{e.m.} = \oint_{C_0} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}$$

であるから、 $k=1$ として

$$\phi^{e.m.} = \oint_{C_0} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{n}dS$$

ファラデーの電磁誘導の法則

ファラデーの法則の微分形

$$\phi^{e.m.} = \oint_{C_0} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{n}dS$$

上の式は、導体で構成されるコイルに発生する起電力として実験的に確かめられたが、ファラデーは導体が無くとも電界が発生すると考えた。
したがって、周回積分はコイルに沿うものでなく、空間の任意の閉曲線 C_0 で構わない。するとストークスの定理より、

$$rot\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x},t)}{\partial t}$$

が導かれる。

運動する導線内に発生する起電力

ここまで、固定された閉曲線を貫く磁束が変化したとき起電力を起こすと考えてきた。それでは磁界が固定され閉曲線が動くとどうなるか。

運動するコイルについて鎖交磁束の変化率

$\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{v}\Delta t\times\Delta\boldsymbol{r}) = -(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\Delta\boldsymbol{r}\Delta t$

コイル全体では $\frac{d\Phi}{dt} = -\oint_{C_0}(\mathbf{v}\times\mathbf{B}(\mathbf{r}))\cdot d\mathbf{r}$

ローレンツ力と誘導起電力の等価性

運動するコイルについて鎖交磁束の変化率

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\oint_{C_0}(\mathbf{v}\times\mathbf{B}(\mathbf{r}))\cdot d\mathbf{r}$$

をファラデーの電磁誘導の法則と合わせれば

$$\phi^{e.m.} = \oint_{C_0}(\mathbf{v}\times\mathbf{B}(\mathbf{r}))\cdot d\mathbf{r}$$

が得られる。このことはコイル内に誘導電場 $\mathbf{E}^{e.m.} = \mathbf{v}\times\mathbf{B}$

が発生し、コイルを構成する導体中の自由電子に

$\mathbf{F} = e\mathbf{E}^{e.m.} = e\mathbf{v}\times\mathbf{B}$ なるローレンツ力が作用することと一致する。

準定常電流と交流回路理論

狭義のアンペールの法則： $\oint_{C_0}\mathbf{H}(t)\cdot d\mathbf{r} = I(t)$

（変位電流項を無視、つまり時間変化を無視している）

電磁誘導の法則： $\phi^{e.m.} = -\frac{d\Phi}{dt}$（時間変化を考慮している）

また $\Phi = LI$（ L ：自己インダクタンス）が成立するから

$$\phi^{e.m.} = -L\frac{dI}{dt}$$

：インダクタンス（コイル）に発生する誘導起電力

交流回路理論

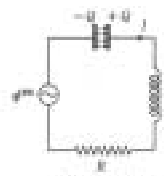

図1.4 交流回路

$$div\mathbf{D}(\mathbf{x},t) = \rho(\mathbf{x},t)$$
$$div\mathbf{B}(\mathbf{x},t) = 0$$
$$rot\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = -\frac{\partial\mathbf{B}(\mathbf{x},t)}{\partial t}$$
$$rot\mathbf{H}(\mathbf{x},t) = \frac{\partial\mathbf{D}(\mathbf{x},t)}{\partial t} + \mathbf{i}(\mathbf{x},t)$$

$$V = -L\frac{dI}{dt}$$
$$I = C\frac{dV}{dt}$$
$$V = RI$$
$$\sum V_i = 0$$
$$\sum I_i = 0$$

変位電流を無視した近似理論が交流回路理論。
これにより工学的応用が格段に容易になった。