8　電磁気学の基本法則

Maxwell's Equation

$$\oint_{S_0} D_n dS = Q(t)$$

$$\oint_{S_0} B_n dS = 0$$

$$\oint_{C_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{d}{dt} \int_S B_n dS$$

$$\oint_{C_0} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{d}{dt} \int_S D_n dS + I(t)$$

$$div\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t)$$

$$div\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0$$

$$rot\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial t}$$

$$rot\mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{i}(\mathbf{x}, t)$$

構成方程式

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$

電磁界の存在

変位電流の導入、電磁誘導の法則により、電磁界は電荷、電流を源としなくても存在できるようになる。

電磁波への拡張

物質とのかかわり

電流、電荷と電磁界の関係はローレンツ力で記述できる。

つまり物質との直接関係も記述できた

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = e\mathbf{E} + e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

オームの法則

第２義的な関係に過ぎない

8.2　エネルギー保存則

ローレンツ力を2個の荷電粒子に適用してエネルギー保存則から

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m_1\mathbf{v}_1^2+\frac{1}{2}m_2\mathbf{v}_2^2\right)=-\int_V\left(rot\mathbf{H}-\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right)\cdot\mathbf{E}d^3x$$

更にファラデーの法則より

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m_1\mathbf{v}_1^2+\frac{1}{2}m_2\mathbf{v}_2^2\right)=-\int_V\left(\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}+\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right)d^3x+\int_V div(\mathbf{E}\times\mathbf{H})d^3x$$

$$=-\frac{d}{dt}\int_V\left(\frac{1}{2}\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}+\frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}\right)d^3x+\int_{S_0}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot\mathbf{n}dS$$

ポインティングベクトル

これをまとめて

$$-\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m_1\mathbf{v}_1^2+\frac{1}{2}m_2\mathbf{v}_2^2+\frac{1}{2}\int_V\left[\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}\right]d^3x\right]=\int_{S_0}\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}dS$$

$$\mathbf{S}=\mathbf{E}\times\mathbf{H}$$

Poynting Vector：ポインティングベクトル

エネルギー保存則

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

ポインティングベクトルは電界・磁界に垂直な断面を単位時間あたりに通過する電磁界のエネルギー流を表している。

また領域V内に蓄えられる電磁場のエネルギーは次式で与えられる。

$$U_{e.m.} = \frac{1}{2}\int_V [\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}] d^3x$$

$$-\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m_1\mathbf{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\mathbf{v}_2^2 + \frac{1}{2}\int_V [\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}] d^3x\right] = \int_{S_0} \mathbf{S}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

8.3　電磁ポテンシャル

静電界　$rot\mathbf{E}(\mathbf{x}) = 0$　より　$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -grad\phi(\mathbf{x})$

静磁界　$div\mathbf{B}(\mathbf{x}) = 0$　より　$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = rot\mathbf{A}(\mathbf{x})$

電磁界のポテンシャル

時間変動する電磁界にポテンシャルを拡張する。

磁界は常に　$div\mathbf{B}(\mathbf{x},t)=0$　であるから

$$\mathbf{B}(\mathbf{x},t)=rot\mathbf{A}(\mathbf{x},t)$$

はそのままでいい

しかし電界については　$rot\mathbf{E}(\mathbf{x},t)=-\dfrac{\partial\mathbf{B}(\mathbf{x},t)}{\partial t}$　より

スカラーポテンシャル　$\mathbf{E}(\mathbf{x})=-grad\phi(\mathbf{x})$　は使えない。

そこで次のように拡張

スカラーポテンシャルの変形

$$\mathbf{B}(\mathbf{x},t) = rot\mathbf{A}(\mathbf{x},t)$$ を $$rot\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x},t)}{\partial t}$$

に代入して移項すると $$rot(\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}) = 0$$

そこで改めて E の代わりに $\boldsymbol{E} + \partial \boldsymbol{A} / \partial t$
に対してスカラーポテンシャルを定義すれば

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = -\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x},t)}{\partial t} - grad\phi(\mathbf{x},t)$$

電磁ポテンシャル

$$\mathbf{B}(\mathbf{x},t) = rot\mathbf{A}(\mathbf{x},t)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = -\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x},t)}{\partial t} - grad\phi(\mathbf{x},t)$$

とポテンシャルを利用して表現が可能となる。

$\mathbf{A}(\mathbf{x},t), \phi(\mathbf{x},t)$ を合わせて電磁ポテンシャルとよぶ

しかし、まだここでは任意の関数である

連立微分方程式の解としての電磁ポテンシャル

$$div\mathbf{D}(\mathbf{x},t) = \rho(\mathbf{x},t)$$

$$rot\mathbf{H}(\mathbf{x},t) = \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{x},t)}{\partial t} + \mathbf{i}(\mathbf{x},t)$$

電磁ポテンシャルは上式で電流、電荷を与えられたとき
次の連立微分方程式の解として定められる。

$$\left(\Delta - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{A} - grad\left(div\mathbf{A} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) = -\mu_0\mathbf{i}$$

$$\left(\Delta - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi - grad\left(div\mathbf{A} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

簡略形

しかしこのままでは複雑である。そこで更に式を変形して

$$\left(\Delta - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{A}^{(L)} = -\mu_0 \mathbf{i}$$

$$\left(\Delta - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \phi^{(L)} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

ただし、この解は次式のローレンツ条件を満たしていなければならない

$$div \mathbf{A}^{(L)} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi^{(L)}}{\partial t} = 0$$

電磁ポテンシャルを用いた電磁界の計算

$$\left(\Delta-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{A}^{(L)}=-\mu_0\boldsymbol{i}$$

$$\left(\Delta-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi^{(L)}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$div\mathbf{A}^{(L)}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\phi^{(L)}}{\partial t}=0$$

電流、電荷が与えられたとき連立微分方程式をローレンツ条件の下に解き、下の2式に代入して電磁界が得られる。

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t)=-\frac{\partial\mathbf{A}(\mathbf{x},t)}{\partial t}-grad\phi(\mathbf{x},t)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x},t)=rot\mathbf{A}(\mathbf{x},t)$$

電磁ポテンシャルと
スカラーポテンシャル、ベクトルポテンシャル

$$\left(\Delta-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{A}^{(L)}=-\mu_0\boldsymbol{i}$$

$$\left(\Delta-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi^{(L)}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

電磁ポテンシャル

$$\Delta\boldsymbol{A}=-\mu_0\boldsymbol{i}$$

$$\Delta\phi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

時間変動の無い場

スカラーポテンシャル、ベクトルポテンシャルの積分界

$$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\Delta\boldsymbol{A} = -\mu_0\boldsymbol{i}$$

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V \frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|}dV'$$

$$\boldsymbol{A}(x) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V \frac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|}dV'$$

遅延ポテンシャル

$$\left(\Delta - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{A}^{(L)} = -\mu_0 \boldsymbol{i}$$

$$\left(\Delta - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \phi^{(L)} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\phi(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{t} - |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'| / c)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} dV'$$

$$\boldsymbol{A}(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{t} - |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'| / c)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} dV'$$

アンテナからの放射電磁界の計算

$$\phi(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V \frac{\rho(\boldsymbol{r}',t-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/c)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dV'$$

$$\boldsymbol{A}(x)=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V \frac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}',t-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/c)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dV'$$

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{r},t)=-\frac{\partial \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}-grad\,\phi(\boldsymbol{r},t)$$

$$\mathbf{B}(\boldsymbol{r},t)=rot\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$$