2　近接作用と静電場

内容

1. クーロンの法則から静電界を誘導
2. ガウスの法則（積分形）
3. ガウスの法則(微分形）

電荷がつくる静電界

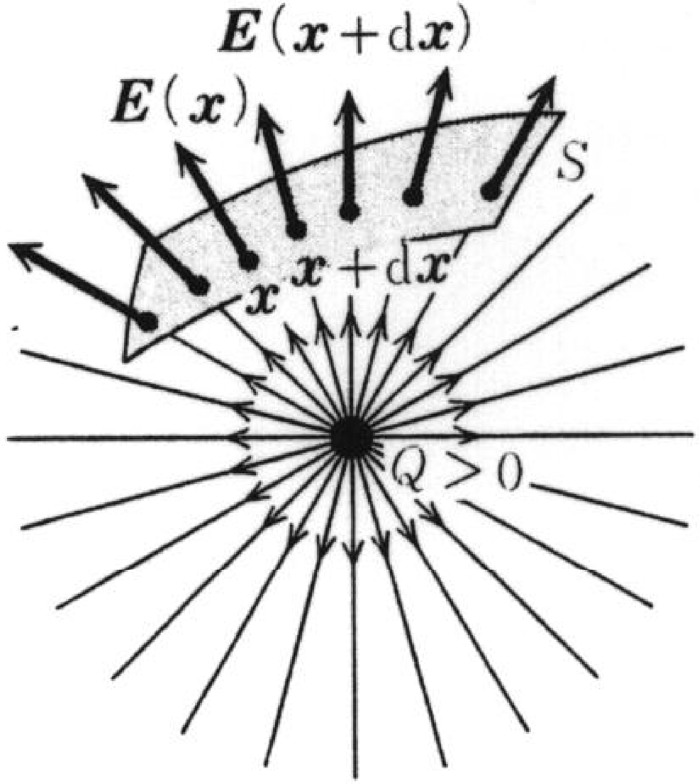
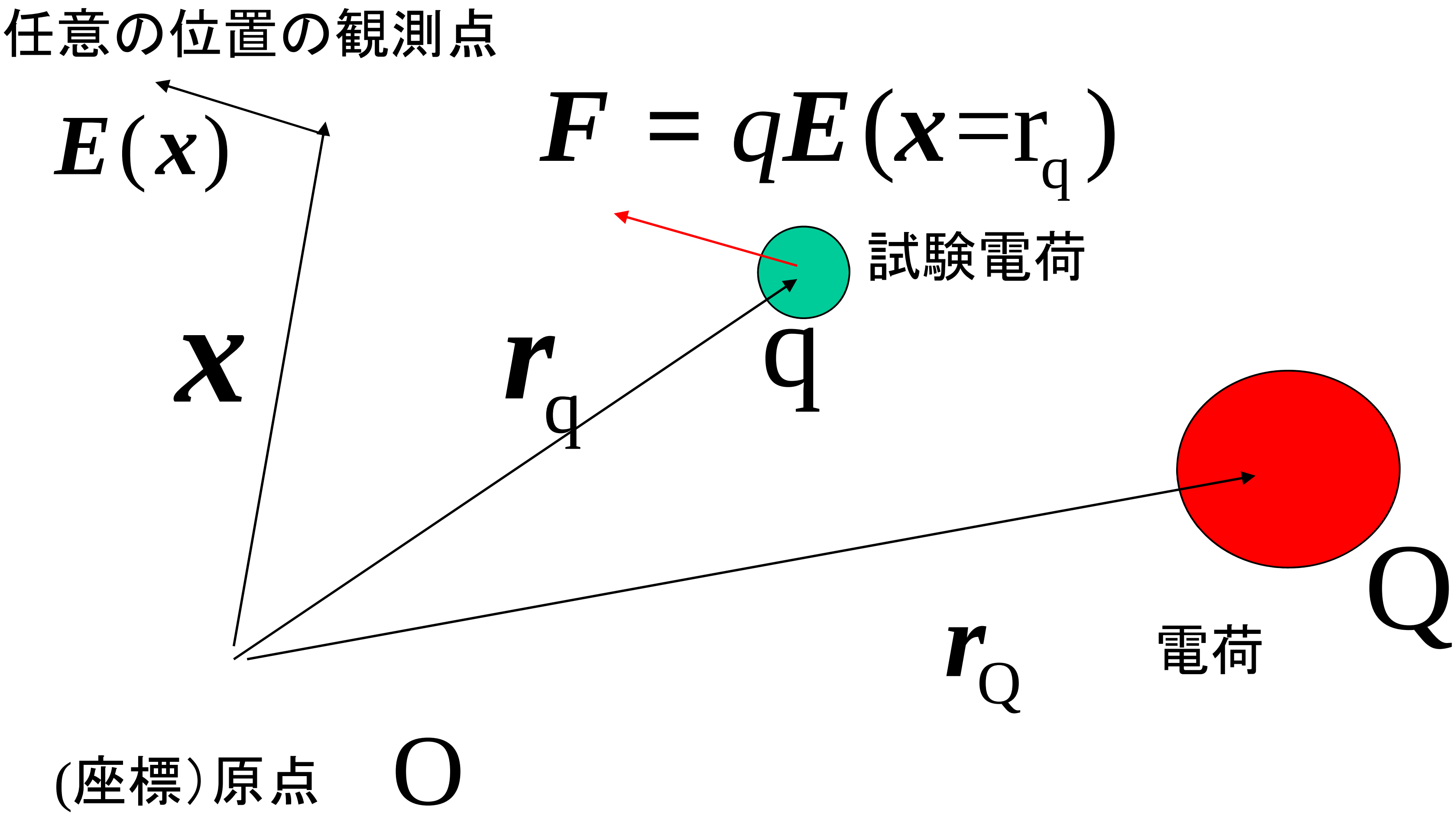


図 2.1　点電荷 Q のつくる静電場

電荷と座標


任意の位置の観測点
$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$
$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}=\mathrm{r}_q)$
試験電荷
$\boldsymbol{x}$
$\boldsymbol{r}_q$
q
Q
$\boldsymbol{r}_Q$
電荷
(座標)原点
O

2.1 静電力と静電場

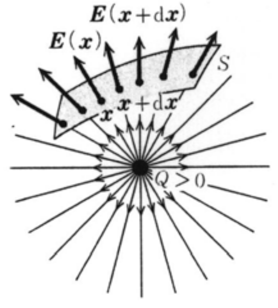


図 2.1　点電荷 Q のつくる静電場

静電力の式(クーロンの法則)の分割

スカラー表現

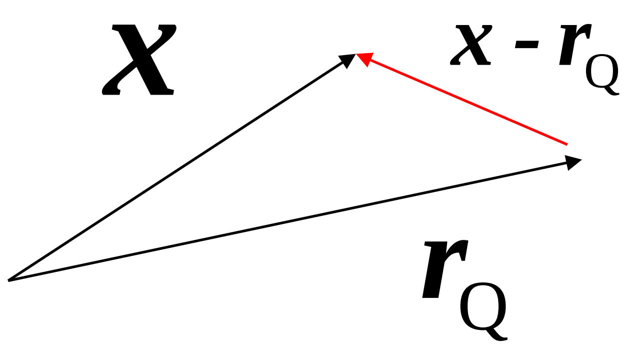
$$F = qE$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}$$

ベクトル表現

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_q) = q\mathbf{E}(\mathbf{x} = \mathbf{r}_q)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{x}-\mathbf{r}_Q}{\left|\mathbf{x}-\mathbf{r}_Q\right|^3}$$



電場・電界による場の歪表現
試験電荷がなくても電界は存在している

重ね合わせの理

- 線形性
- ベクトル表現の便利さ

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{r}_Q}{\left|\mathbf{x} - \mathbf{r}_Q\right|^3}$$

$$\boldsymbol{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i(\mathbf{x} - \mathbf{r}_i)}{\left|\mathbf{x} - \mathbf{r}_i\right|^3}$$

積分形

$$\boldsymbol{E}(\mathbf{x})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i(\mathbf{x}-\mathbf{r}_i)}{\left|\mathbf{x}-\mathbf{r}_i\right|^3}$$

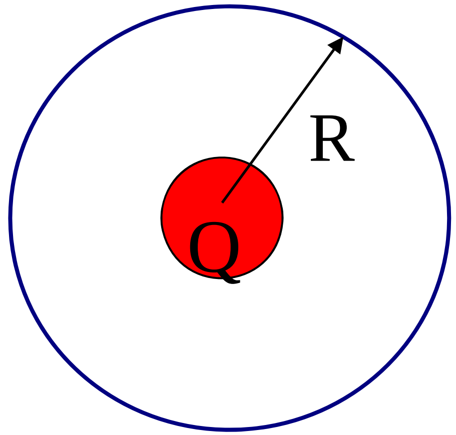
体積分布する電荷に対する表現

$$E(\mathbf{x})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\rho(\mathbf{x}')}{\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right|^3}dV'$$

ただし実際に体積積分をすることはめったにない。

よりエレガントな方法をとる。

ガウスの法則



近接作用をより明確に表現する

点電荷の周囲に球殻をおいて面積積分

$$4\pi R^2 E(R) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

点電荷から発生する円錐形状について発生する電界の積分
：　任意の表面形状について一定

$$\iint_{S_0} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

：一般形

閉曲面と電気力線

点電荷から見た、ある立体角の中の電気力線の数は一定。

この立体角を横切る任意の曲面を貫く力線の数も一定。

$$\iint_{S_0} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

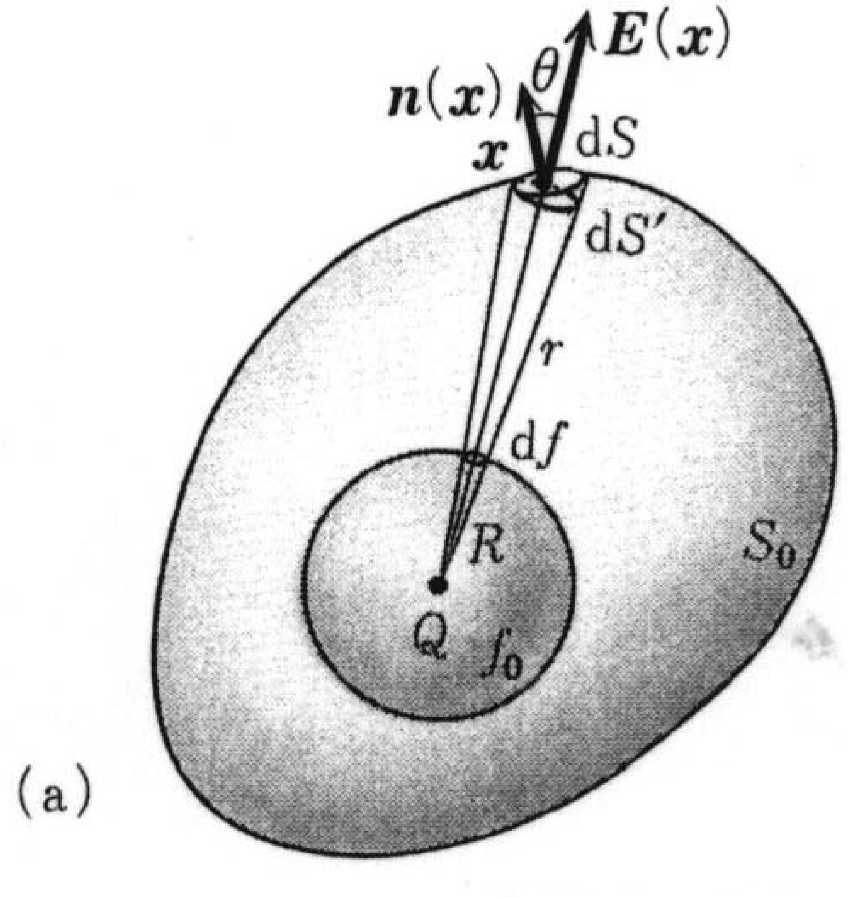
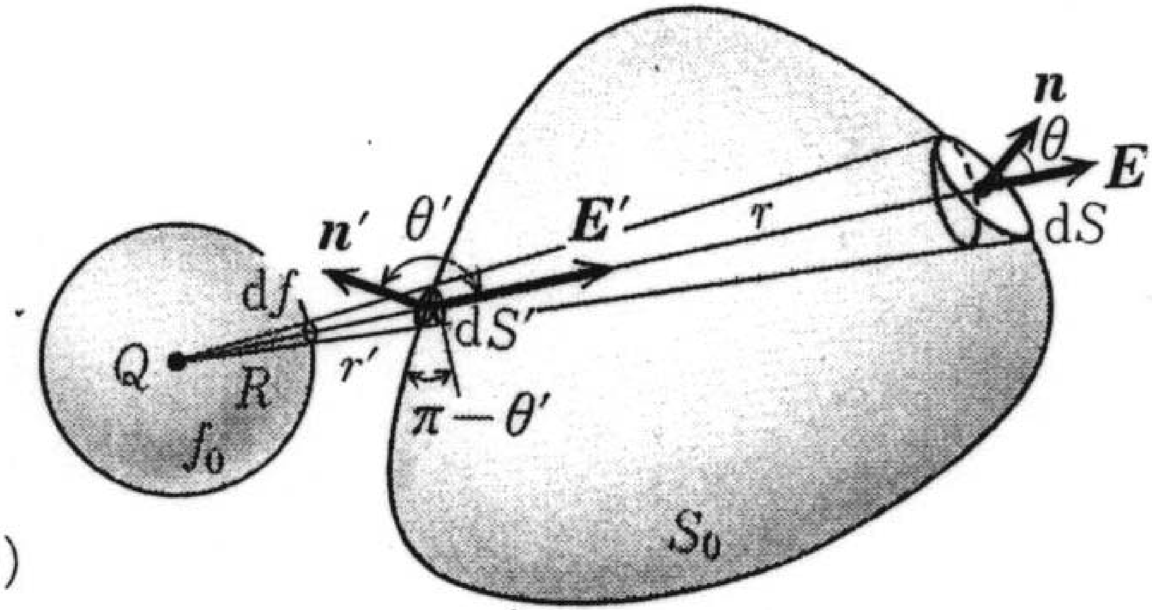


図 2. 2　ガウスの法

内部に電荷をもたない閉曲面

内部に電荷をもたない閉曲面について表面積分は常に０

$$\iint_{S_0} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$



(b)

多数の電荷について重ね合わせ

$$\iint_{S_0} \mathbf{E}\cdot\mathbf{n}dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum Q_i = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint \rho(\mathbf{x})dV$$

これらをすべて包括する：　積分形のガウスの法則

$$\iint_{S_0} \mathbf{D}\cdot\mathbf{n}dS = \iiint \rho(\mathbf{x})dV$$

ただし

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}$$

真空中での電束密度の定義

連続分布する電荷に対するガウスの法則

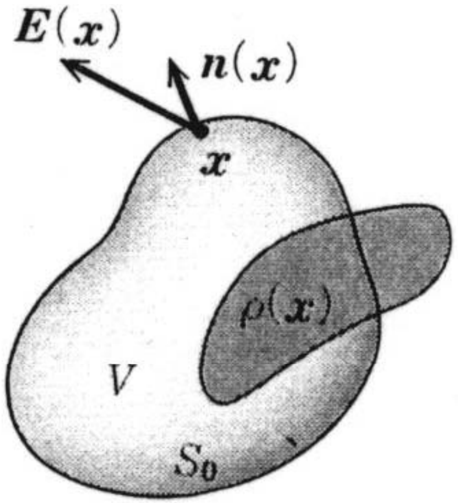


図 2.3　連続的に分布する電荷の場合のガウスの法則

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

$$\iint_{S_0} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint \rho(\mathbf{x})\, dV$$

球状電荷のつくる電界

例題1　　ガウスの定理積分系から電界を求める

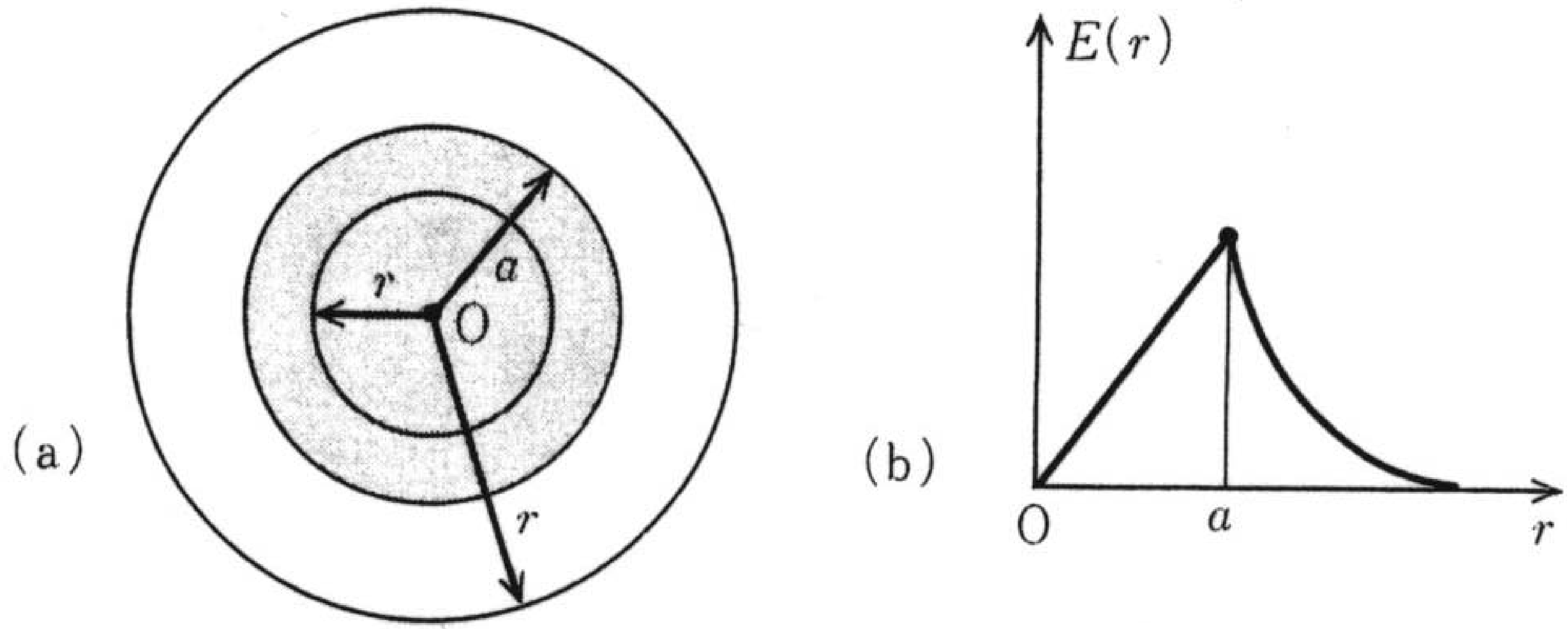


図 2.4　球状電荷のつくる静電場.（a)球状電荷とガウスの法則.（b)球内外の静電場の大きさ

微分形のガウスの法則

ベクトル公式

$$\iint_{S_0} \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{n} dS = \iiint_V div\boldsymbol{D} dV$$

湧出：発散の意味

$$\iint_{S_0} \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{n} dS = \iiint \rho(\mathbf{x}) dV$$

ガウスの法則
積分形

$$div\boldsymbol{D}(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})$$

ガウスの法則
微分形

ガウスの方程式と近接作用

$$div\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \mathrm{E_x}}{\partial \mathrm{x}} = \rho$$

1次元の場合

$$E_x(x+\Delta x) = E_x(x) + \frac{\rho(\mathbf{x})\Delta x}{\varepsilon_0}$$

隣接する場所の電界が関係しあう

2.3　静電ポテンシャル

$$\boldsymbol{F} = -gradV$$

力学系で $\boldsymbol{F}$ が力、V がポテンシャル

$$V = -G\frac{mM}{r}$$ 万有引力

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, F_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\boldsymbol{F} = -gradV$$

原点にある点電荷がつくる電界

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$$

を成分ごとに書き下すと

$$E_x = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{|\mathbf{r}|^3}, E_y = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y}{|\mathbf{r}|^3}, E_z = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{|\mathbf{r}|^3}$$

ここで

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

静電ポテンシャルの定義

$$E_x = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{|\mathbf{r}|^3}, E_y = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y}{|\mathbf{r}|^3}, E_z = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{|\mathbf{r}|^3}$$

を利用して

$$\phi(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\mathbf{r}|}$$

として静電ポテンシャルを定義すれば

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -grad\phi(\mathbf{x})$$

として、電界を表現することができる。
上式は重ね合わせの理より、いかなる電荷分布でも成立する

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}dV$$

静電ポテンシャルのメリット

直接の動機:

ベクトルの代わりにスカラーで電界を表現したい

より深い理由:

ポテンシャルの利用により電磁界の原因とそれから作られる電磁界の関係を一般的に明瞭にできる

保存場の性質

位置ポテンシャル

等高線の地図から勾配を一意に決めることができる

$$V = \oint E dl = \iint rotE \cdot ndS = \iint rot(-grad\phi) \cdot ndS \equiv 0$$

$$rot(grad\Phi) = 0$$

$$div(rot\mathbf{A}) = 0$$

ベクトル公式

電界の閉曲線の沿う線積分

任意の閉曲線に沿った積分について次式が成立

$$\oint_{C_0} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0$$

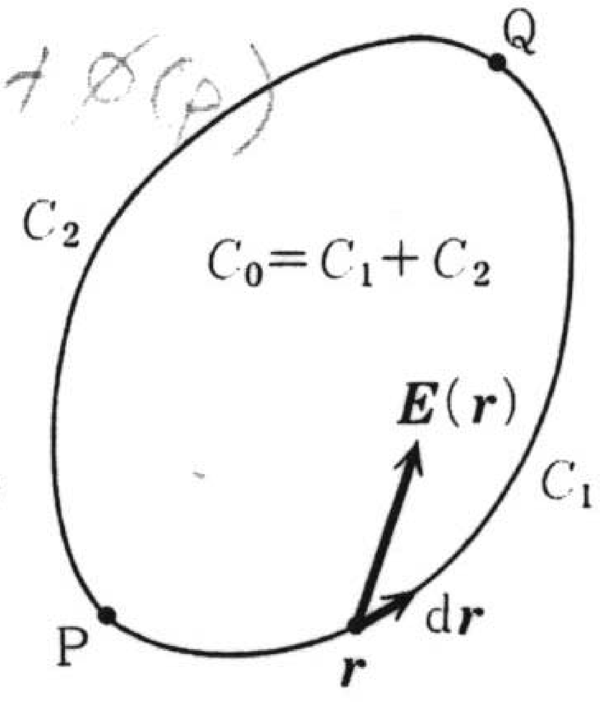


図 2.6　静電場の線積分

保存場としての電界

$$\oint \mathbf{E}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = 0$$

に対してベクトル公式（ストークスの定理）を利用すれば

$$\oint \mathbf{E}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = \iint rot\mathbf{E}(\mathbf{r})\cdot \mathbf{n}dS = 0$$

$$rot\mathbf{E}(\mathbf{x}) = 0$$ 保存場の定義

電界の線積分

$$grad\phi = \mathbf{i}_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \mathbf{i}_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + \mathbf{i}_z \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

$$d\mathbf{r} = \mathbf{i}_x dx + \mathbf{i}_y dy + \mathbf{i}_z dz$$ より

$$\int_P^Q \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = -\int_P^Q grad\phi \cdot d\mathbf{r} =$$

$$-\int_P^Q \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz\right) = \int_P^Q d\phi = \phi(P) - \phi(Q)$$

電界の線積分が積分の始点と終点の静電ポテンシャルだけで規定され、積分経路に依らないことを表している。

球状電荷による静電ポテンシャル

$$grad\Phi = \boldsymbol{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \boldsymbol{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \boldsymbol{\Phi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \Phi}{\partial \phi}$$

球座標系における勾配(Gradient)

球対称なら

$$E_r(r) = -grad\,\phi(r)\Big|_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r}$$

$$\phi(r) - \phi(\infty) = -\int_{\infty}^{r} E(r)dr$$

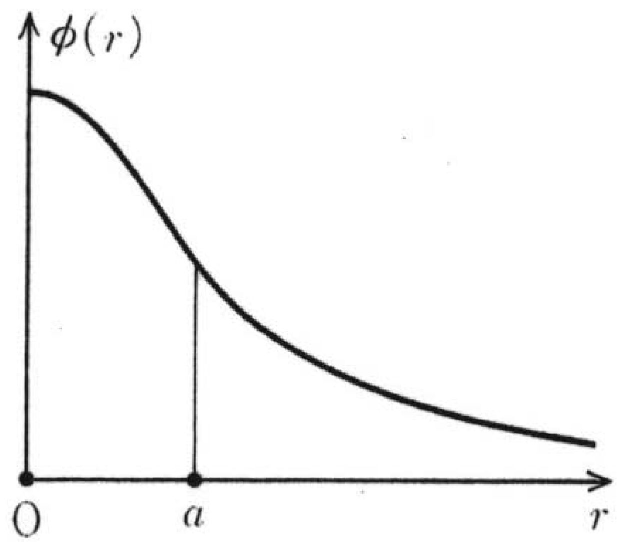


図 2.8　球状電荷による静電ポテンシャ