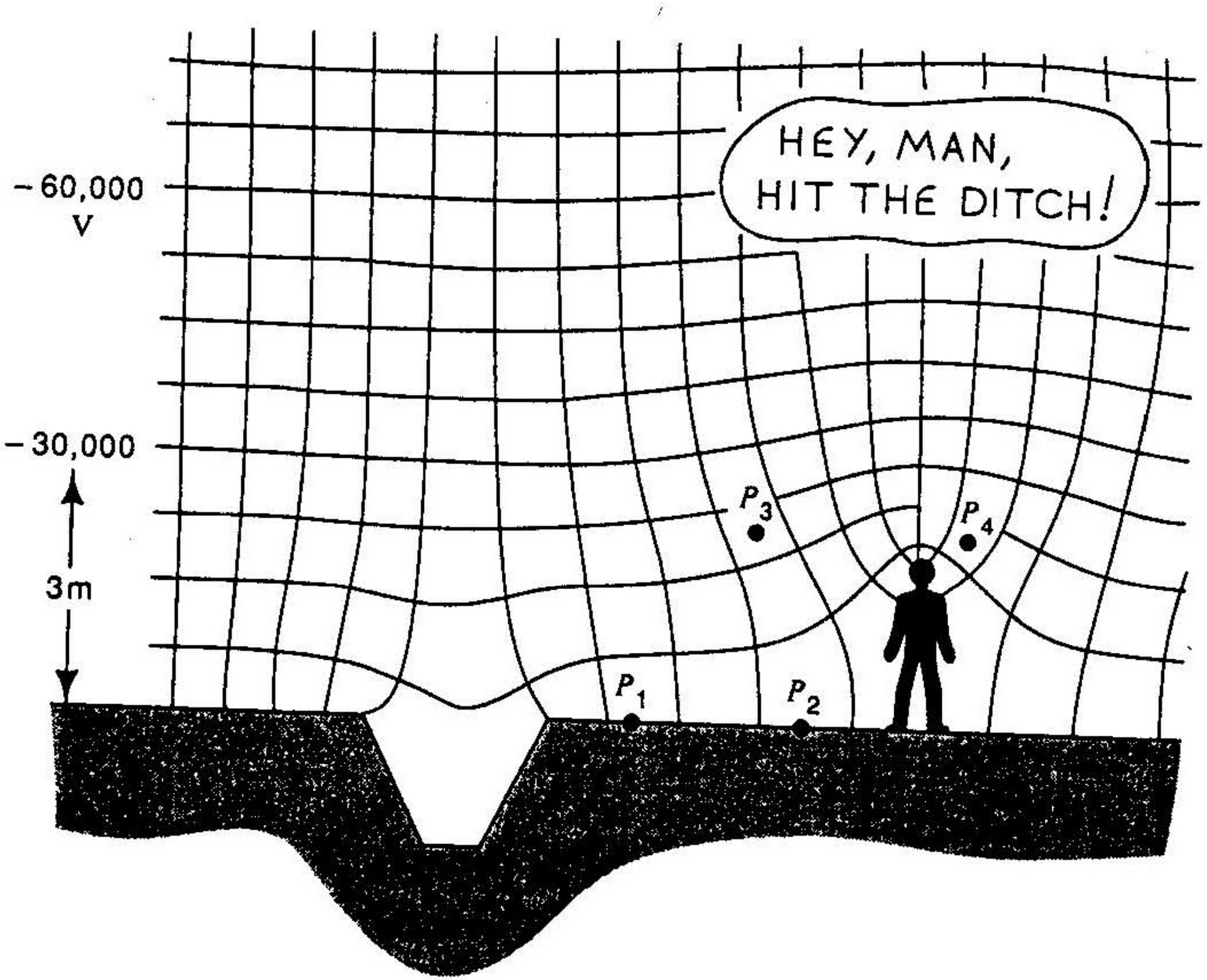
3　さらに静電場について



John Kraus, Electromagnetics, 4th Edition, McGraw hill

3.1 静電ポテンシャルとポアッソンの方程式

静電場の基本法則

積分形：$\iint_{S_0} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint \rho(\mathbf{x}) dV$ または　微分形：　$div\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})$

積分形：$\oint \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0$　　または　微分形：$rot\mathbf{E}(\mathbf{x}) = 0$

静電力：$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$

ただし時間変化のある場合

$$div\mathbf{D}(\mathbf{x},t) = \rho(\mathbf{x},t)$$

、

$$rot\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x},t)}{\partial t}$$

であり、静電界とは異なる。

静電場を求める方法

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -grad\phi(\mathbf{x})$$ が成立するのは

$$rot\mathbf{E} = rot(-grad\phi) = 0$$ が恒等的に成立するからである。（保存場）

$$div(grad\phi) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$ または　： $$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$ ポアッソンの方程式

この微分方程式を境界条件の下に解けば静電界はすべて求まる。

（ただし簡単ではない）

$$\Delta \equiv div(grad)$$ **ラプラシアン**

位置エネルギーと静電ポテンシャル

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} = -q\ grad\phi$$

点電荷が力学的な位置エネルギーVをもつとき、それに作用する力は:

$$\boldsymbol{F} = -grad\ V$$

であるから点電荷の位置エネルギーと静電ポテンシャルには次式が成立

$$V(\boldsymbol{r}) = q\phi(\boldsymbol{r})$$

ラプラシアン

直交座標系

$$\Delta\Phi \equiv \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

円筒座標系

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

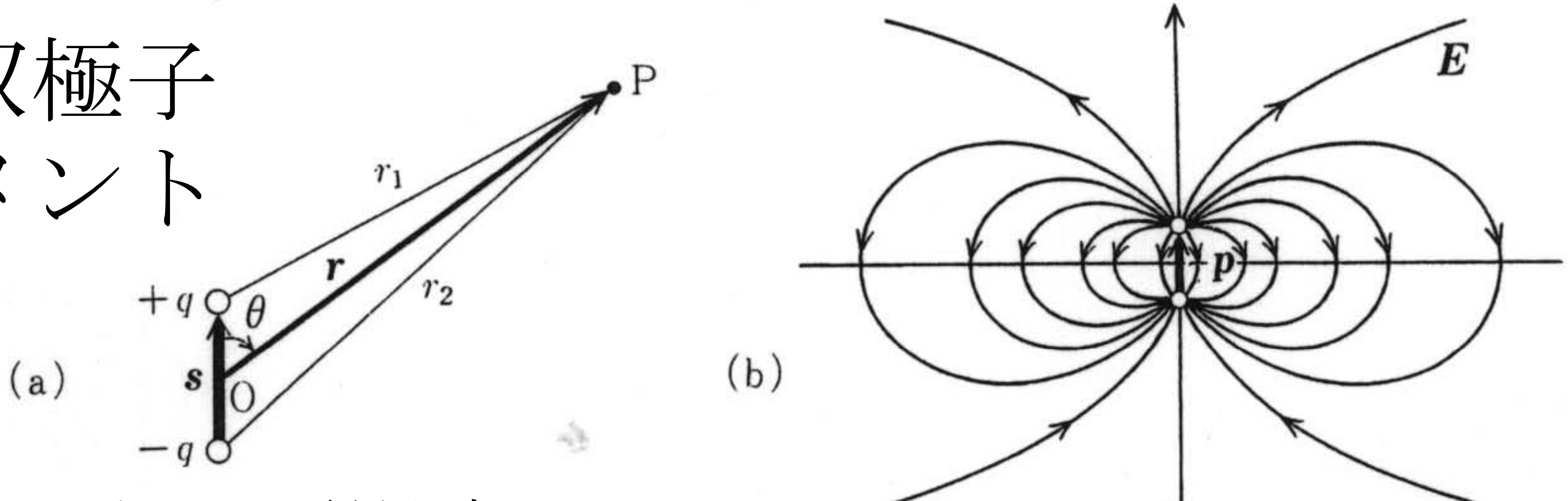
球座標系

$$\Delta\Phi \equiv \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\Phi^2}$$

球対称のとき:

$$\Delta\Phi \equiv \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r})$$

電気双極子モーメント



$\mathbf{p} = q\mathbf{s}$　がつくる電界を求める。 これはベクトル量

図 3.1　電気双極子のつくる静電場

静電ポテンシャルの利用

$$\phi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right] \cong \frac{pr\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

テイラー展開

$$r_{1,2} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 \mp rs\cos\theta}, \quad \frac{1}{\sqrt{1 \pm x}} \approx 1 \mp \frac{x}{2} + O(x^2)$$

電気双極子モーメントが作る電界

$$\phi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right] \cong \frac{pr\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$\mathbf{E} = -grad\,\phi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{\mathbf{p}}{r^3} + \frac{3\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}\cdot\mathbf{p})}{r^5}\right]$$

点電荷： $\phi(r) \propto \dfrac{1}{r}$　双極子モーメント： $\phi(r) \propto \dfrac{1}{r^2}$

静電誘導

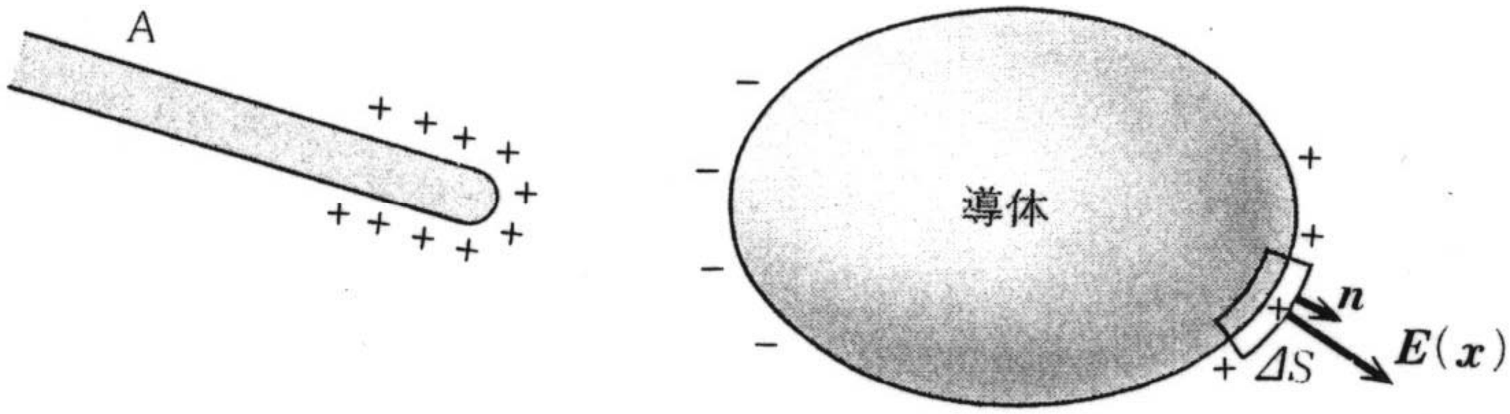


図 3. 3　静電誘導

導体表面 ΔS でガウスの法則を適用

$$\int \rho dV = w(\boldsymbol{x})\Delta S = \varepsilon_0 E_n(\boldsymbol{x})\Delta S$$

$w(\boldsymbol{x}) = \varepsilon_0 E_n(\boldsymbol{x})$ 電荷面密度 C/m^2

ポアッソン方程式の解の唯一性　$\Delta\phi = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

(A)電荷分布のない領域内部で電位は極大または極小をとることはない（アーンショーの定理）
電位$\phi(\boldsymbol{r})$が極大あるいは極小値をとれば$\Delta\phi(\boldsymbol{r}) \neq 0$ であり電荷のない場合のポアッソンの方程式に反する。

(B)電荷分布のない領域の内部で境界面が等電位となれば内部の至るところで電位は一定となりその境界面での値に等しい

$\phi(\boldsymbol{r})$ が領域境界で一定値をとり内部で変化するならアーンショーの定理に反する。

（C）領域内部の電荷分布と境界面上の電位分布が与えられれば内部の電位は唯一に定まる

$\Delta\phi_1 = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}, \Delta\phi_2 = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$　であり、

境界上で　$\phi_1(\boldsymbol{r}) = \phi_2(\boldsymbol{r})$　であれば領域内部の至る所で

$$\phi(r) = \phi_1(r) - \phi_2(r) = 0$$

導体の電気的性質

（ファラデー・ケージ、Van de Graaff 発電機）

1. 導体内部で電界0
2. 導体の内部及び表面で電位一定
3. 導体内部で電荷0
4. 導体表面で

$$E_n(\mathbf{x}) = \frac{\omega(\mathbf{x})}{\varepsilon_0}$$

ラプラス方程式の直接解法

直交座標系

$$\Delta\Phi \equiv \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

$$\Delta\phi \equiv \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = c_1$$

$$\phi = c_1 x + c_2$$

これに境界条件を加えて定数を決める

コンデンサ

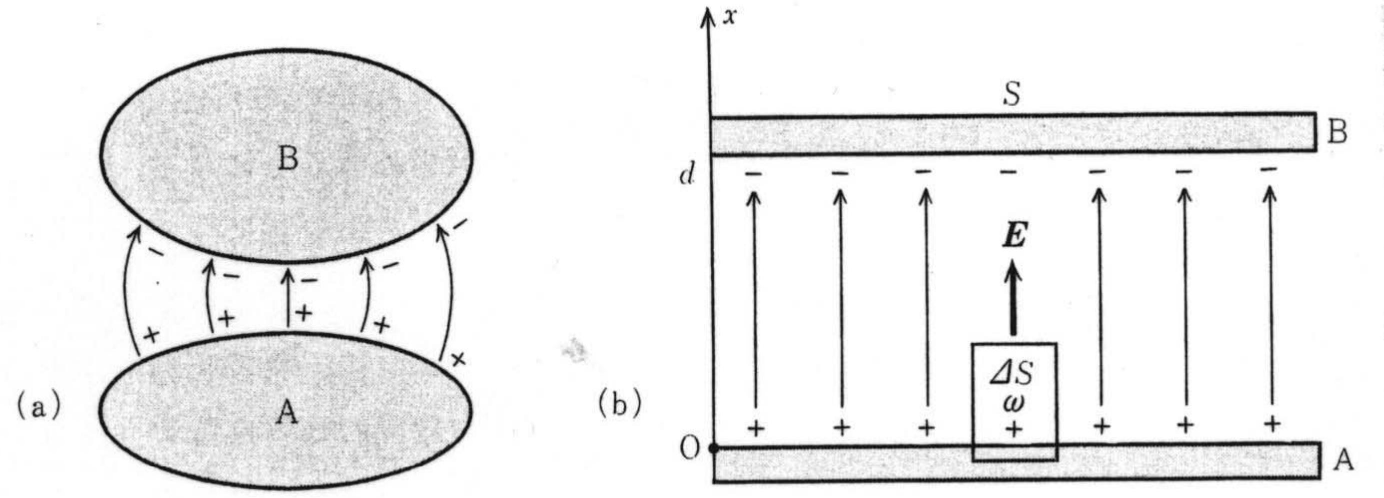


図 3.4　コンデンサー．(a)一般のコンデンサー．(b)平行板コンデンサー

導体に与える電荷量と電位は比例する

$$C = \frac{Q}{V}$$

静電容量の定義

平行平板コンデンサ

一次元の電位と電界

$$E_x = \frac{\omega}{\varepsilon_0} \qquad \mathbf{E} = -grad\phi = -\mathbf{i}_x \frac{\partial \phi(x)}{x}$$

$$\phi(x) = -\int_0^x E_x \partial x = -\frac{\omega}{\varepsilon_0} x + k$$

より静電容量は

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon_0 S}{d} (F)$$

円筒型コンデンサ

円筒座標系の場合

$$\mathbf{E} = -grad\phi = -\frac{\partial \phi(r)}{\partial r}$$（軸対称のとき）

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\varepsilon_0 \ell}{\log(b/a)} \left(F/m\right)$$

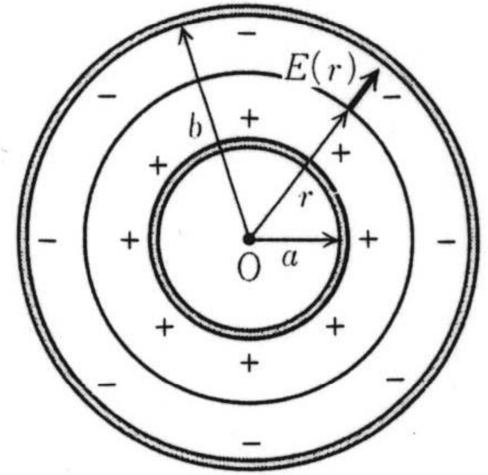


図 3.5　円筒形のコンデンサーの断面

コンデンサに蓄えられるエネルギー

２枚の極板の間で、微小電荷dqを運ぶときに要する仕事量 dW

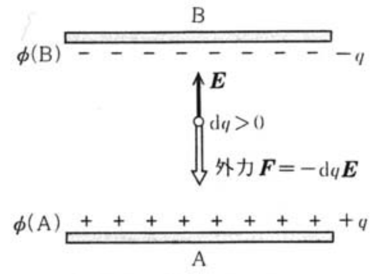


図 3.6 静電エネルギー

$$dW = -dq\int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = +dq\int_A^B grad\phi\cdot d\mathbf{r}$$

$$= dq\int_{\phi_A}^{\phi_B} d\phi = dq\left[\phi(A)-\phi(B)\right]$$

$C = \dfrac{q}{\phi(A)-\phi(B)}$ を利用すれば $dW = \dfrac{1}{C}q\cdot dq$

コンデンサに蓄えられた全エネルギー

$$dW = \frac{1}{C} q \cdot dq$$

従って $\pm Q$ まで電荷を運ぶために外から与えるべき仕事量は

$$W = \frac{1}{C} \int_0^Q q \cdot dq = \frac{1}{2C} Q^2 \,(J)$$

$$U_e = \frac{1}{2C} Q^2$$

：コンデンサに蓄えられた全エネルギー
（静電エネルギー）静電界で成立

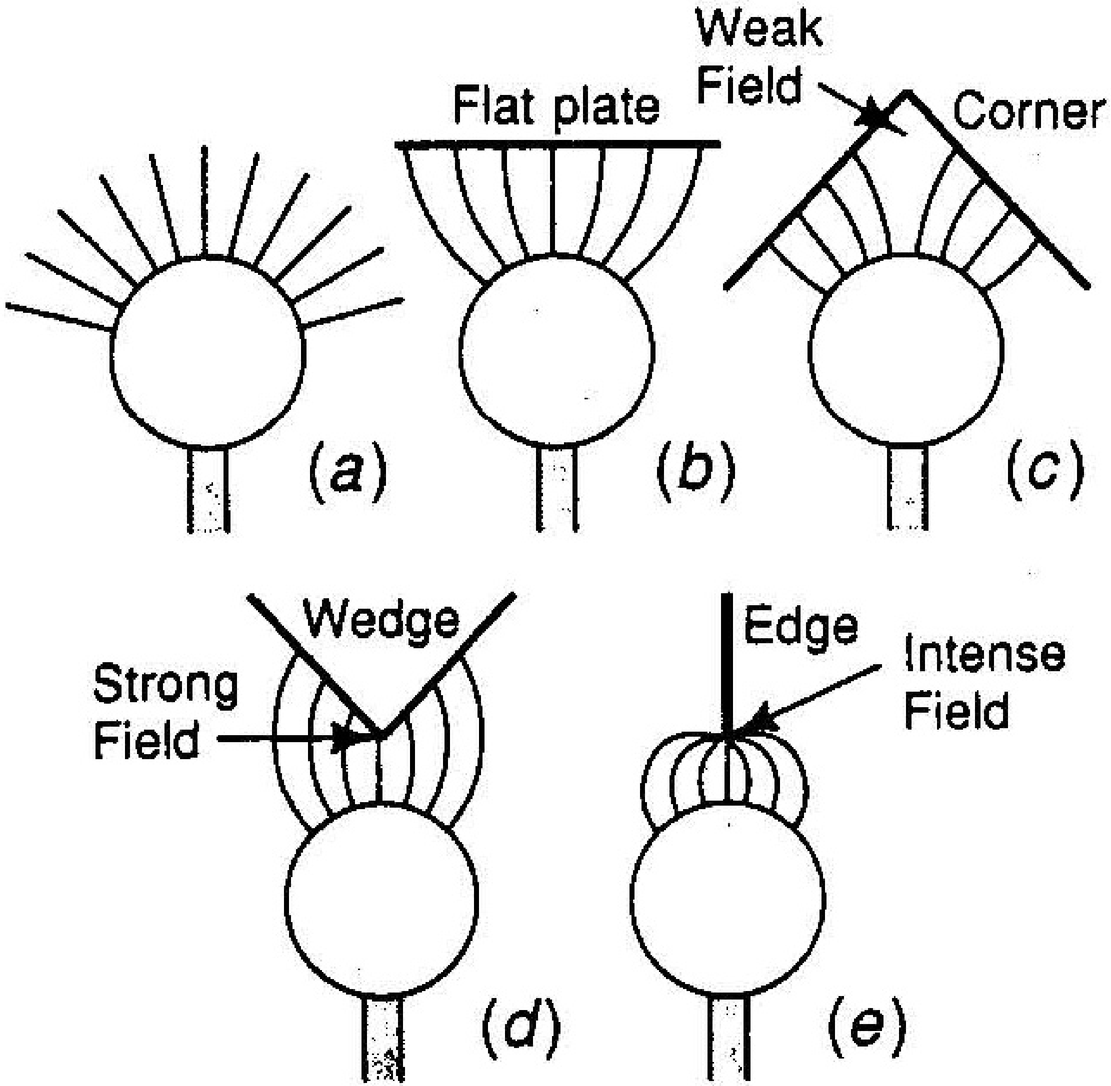
静電場のエネルギー

コンデンサ内部には電界が一様分布している。場の考えを導入すれば

$$U_e = \frac{1}{2C} Q^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \iiint \mathbf{E}(\mathbf{x}') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}') dV$$

本式第３項は時間変動場でも成立する。

$$u_e = \frac{\varepsilon}{2} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E}$$ 空間に蓄えられるエネルギー密度


Weak
Field
Flat plate
Corner
(a)
(b)
(c)
Wedge
Strong
Field
Edge
Intense
Field
(d)
(e)