ベクトル数学の基礎

電磁気学で利用するベクトル演算の復習

藤田広一：　電磁気学ノート　コロナ社

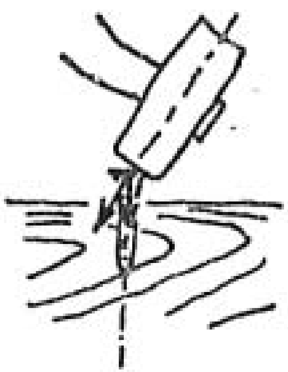
理解しておくべき内容

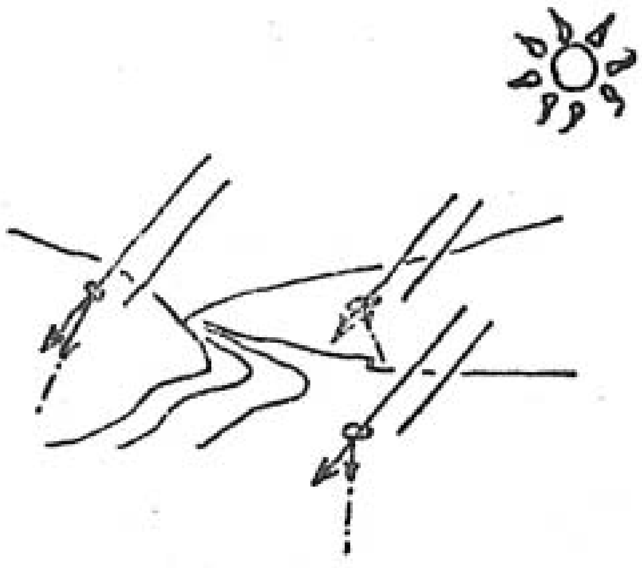
1. **ベクトルの線積分**
2. **ベクトルの面積分**
3. $grad V$
4. $div \boldsymbol{D}$
5. $rot \boldsymbol{H}$
6. **ガウス**(Gauss)**の法則**
7. **ストークス**(Stokes)**の法則**
8. **ベクトルの内積**
9. **ベクトルの外積**

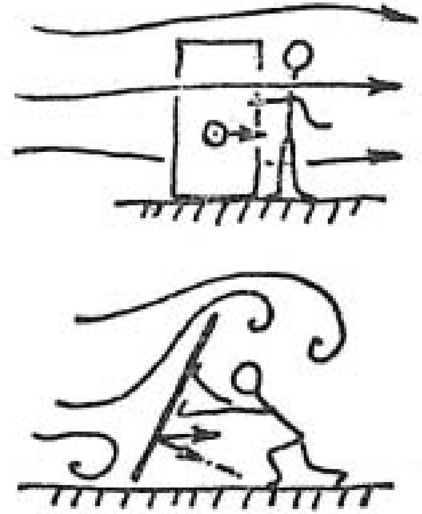
ベクトルの内積

ベクトルの内積は有効成分を表す

$$\boldsymbol{E} \bullet \boldsymbol{T} = \left|\boldsymbol{E}\right|\left|\boldsymbol{T}\right| \cos\theta$$







ベクトルの線積分

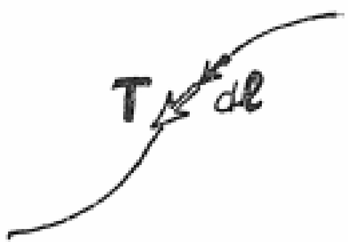


図 2・21　微小変位ベクトル $d\boldsymbol{l}$

g:重力場

T:移動する方向の単位ベクトル

重力場内で移動する物体に対する重力の仕事

$$\int_a^b \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{T}dl = \int_a^b \boldsymbol{g}\cdot d\boldsymbol{l}$$

電界中の電荷の運動と仕事

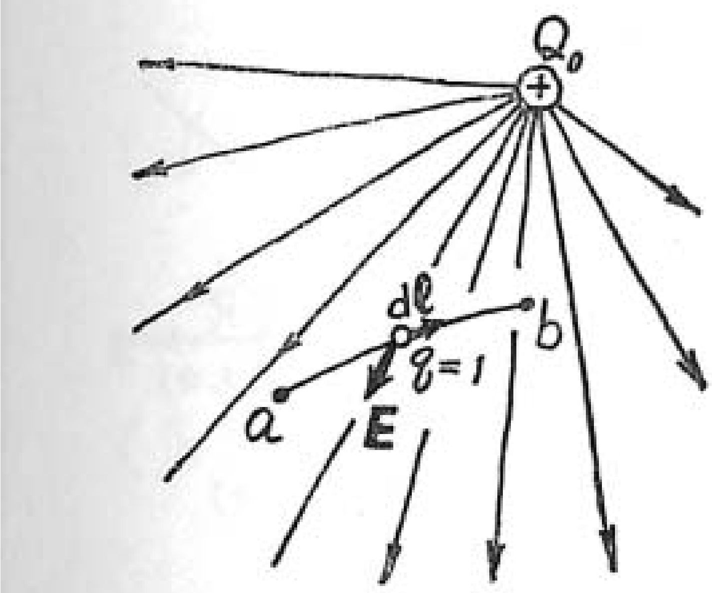


図 2·22 電界内の電荷の運動と仕事

$$V = -\int_a^b q\boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}$$

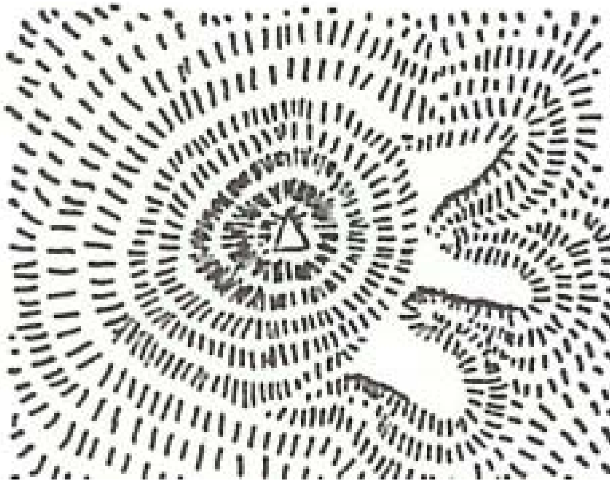
$$\boldsymbol{E} = -grad\mathbf{V}$$

grad$\boldsymbol{V}$

$$gradV = \frac{\partial V}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

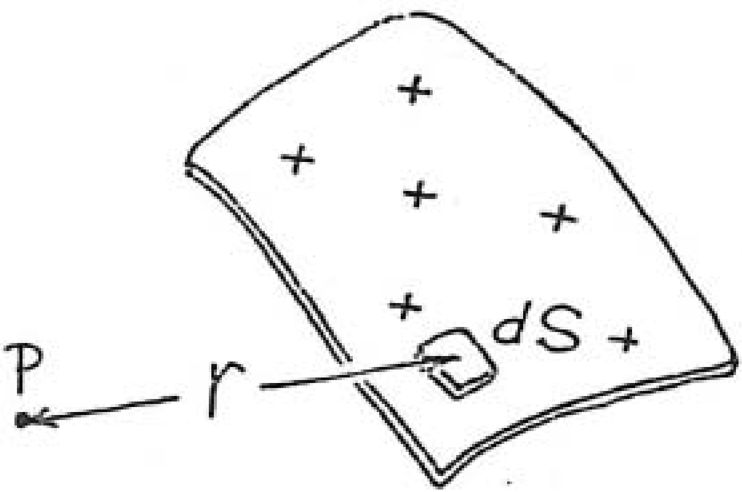
大きさはVの最急傾斜

方向は最急傾斜の方向　　であるベクトル



スカラー関数の面積分

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint\frac{Q}{r}dS$$



スカラー関数の体積積分

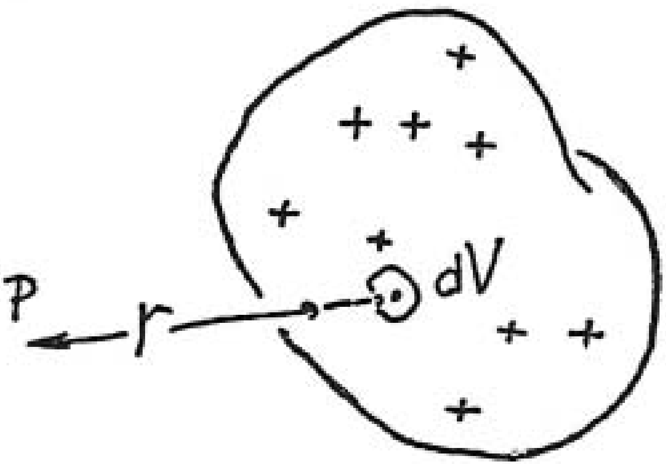
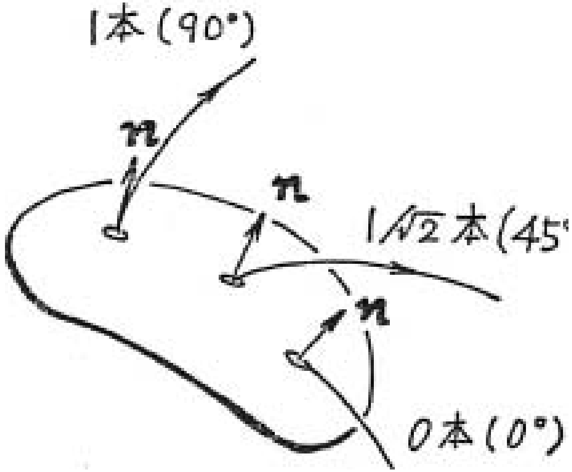


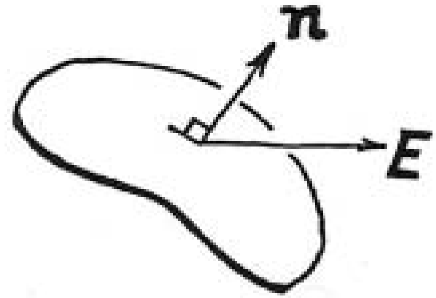
図 3・9 雲状に分布する電荷による電位

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{Q}{r} dS$$

ベクトルの面積分



法線ベクトル:
Normal vector



ベクトルは面に対して任意の方向をもつ

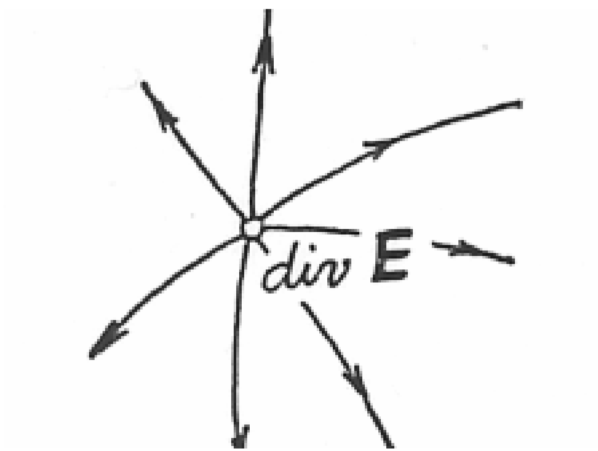
面積分の定義

$$\iint \boldsymbol{E} \bullet \boldsymbol{n} dS$$

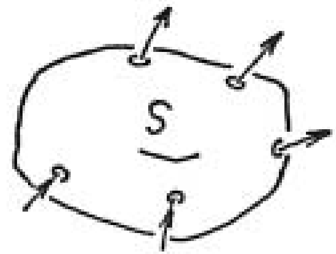
閉曲面を貫く電気力線

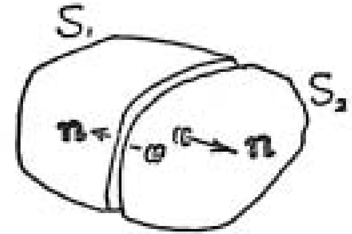
電荷によってつくられる電界

を電気力線で表現する



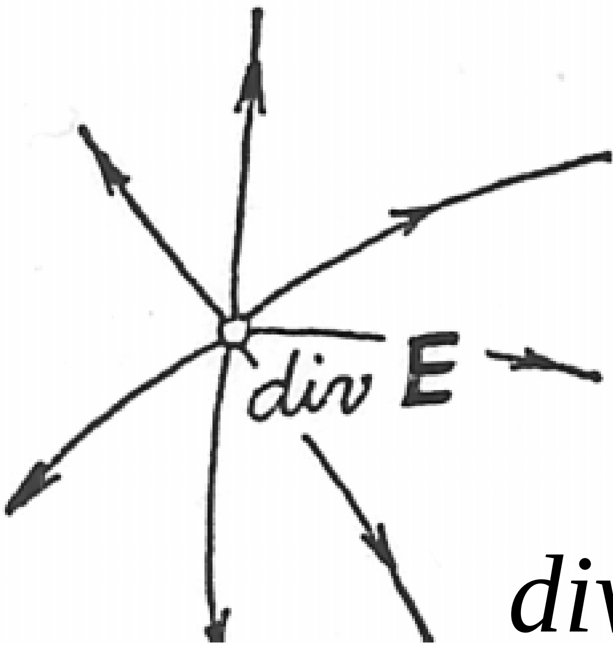
閉曲面を貫く電気力線
の数を数える





div$\boldsymbol{D}$

発散（湧き出し）＝ $\dfrac{\text{（閉曲面から出る力線の総数）}}{\text{（閉曲面につつまれる体積）}}$



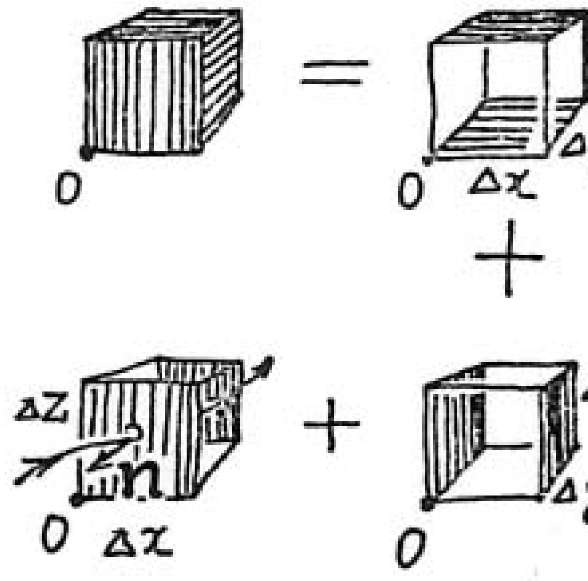
$$div\boldsymbol{D} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\iint \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{n} dS}{\Delta V}$$

div$\boldsymbol{D}$

$$div\boldsymbol{D} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\iint \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{n} dS}{\Delta V}$$

$$= \lim_{\Delta x \Delta y \Delta z \to 0} \frac{\left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\right)\Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta x \Delta y \Delta z}$$

$$= \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$



ガウスの法則

体積Vをとり囲む閉曲面Sについて

$$\iint_{S_0} \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{n} dS = \iiint_V div \boldsymbol{D} dV$$

湧出：発散の意味

ベクトル場

Div (泉)　と　rot (うず)

（a）　泉なし
うずなし

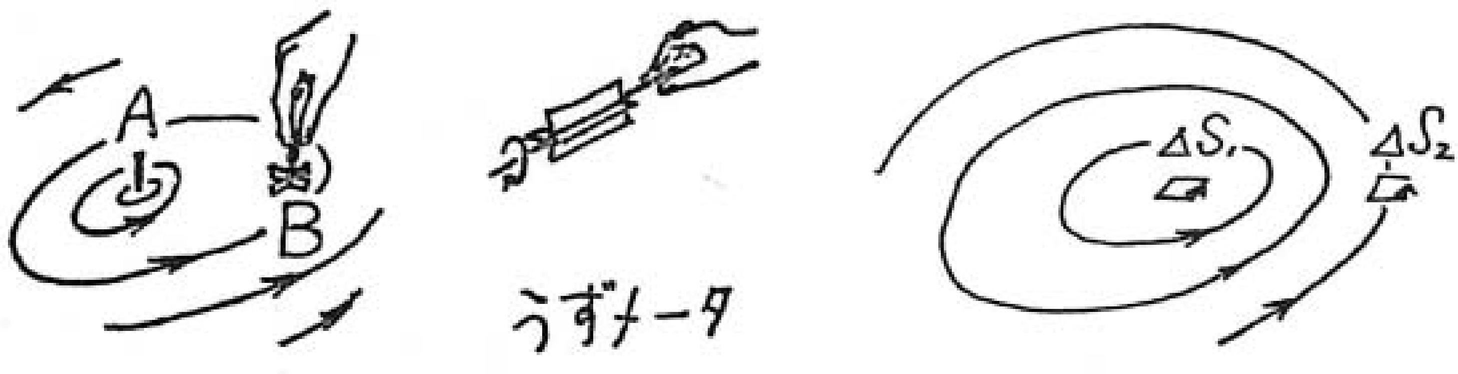
（b）　泉あり
うずなし

（c）　泉なし
うずあり

（d）　泉あり
うずあり

図 6·1　ベクトル場の種類

うずメータ



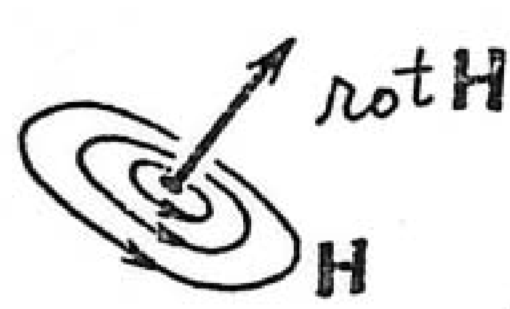
うずの大きさ

$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l}}{\Delta S}$$

ローテーションの定義

大きさ

$$\left|rot\boldsymbol{H}\right| = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint \boldsymbol{H} \bullet d\boldsymbol{l}}{\Delta S}$$



ΔS の周囲について右ネジの進む方向

ローテーションの演算

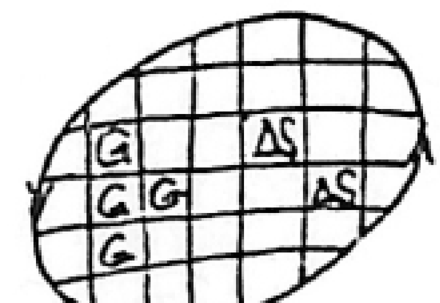
$$
rot\boldsymbol{H} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right)
$$

$$
= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}
$$

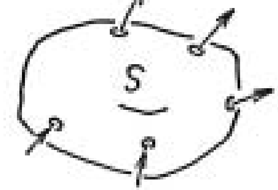
ストークスの定理

閉曲線C**と**C**に囲まれた閉曲面**S**について**

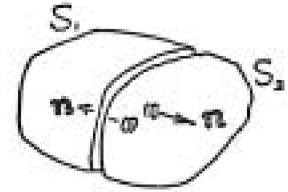
$$\oint_C \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = \iint_S \left(rot\boldsymbol{H} \right) \cdot \boldsymbol{n} dS$$



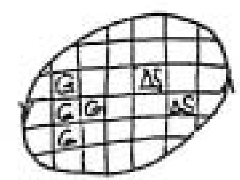
ガウスの法則とストークスの法則



$$\iint_{S_0} \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{n} dS = \iiint_V div\boldsymbol{D} dV$$



$$\oint_C \boldsymbol{H} \bullet d\boldsymbol{l} = \iint_S \left(rot\boldsymbol{H} \right) \bullet \boldsymbol{n} dS$$



微分形と積分形の変換

いずれも積分の次元をひとつ下げる