電磁波

Maxwellの方程式

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$ ファラデーの法則

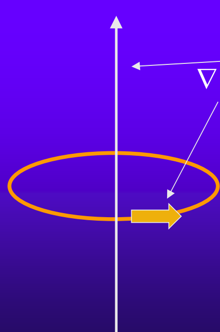
$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$ アンペアの法則

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$$ 電界に関するガウスの法則

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$ 磁界に関するガウスの法則

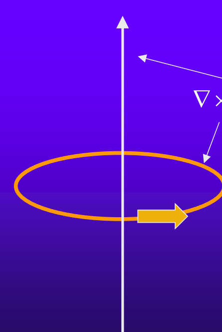
ファラデーの法則

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$



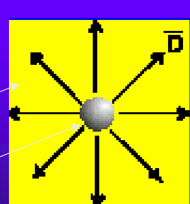
アンペアの法則

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$



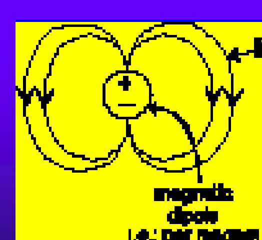
電界に関するガウスの法則

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$$



磁界に関するガウスの法則

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$



構成方程式

$$D = \varepsilon E$$

$$B = \mu H$$

比誘電率，比透磁率

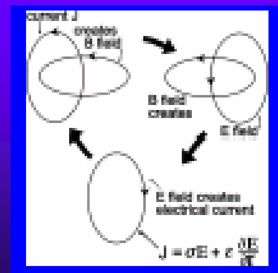
$\varepsilon = \varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ (F/m)　$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$

$\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ (H/m)　$\mu = \mu_r \mu_0 \cong \mu_0$

$$J = \sigma E$$

オームの法則

波動方程式の意味



Maxwellの方程式

$$rot\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$ ファラデーの法則

$$rot\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$ アンペアの法則

$$div\boldsymbol{D} = \rho$$ 電界に関するガウスの法則

$$div\boldsymbol{B} = 0$$ 磁界に関するガウスの法則

構成方程式

$$D = \varepsilon E$$

$$B = \mu H$$

比誘電率，比透磁率

$\varepsilon = \varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ (F/m)　$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$

$\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ (H/m)　$\mu = \mu_r \mu_0 \cong \mu_0$

$$J = \sigma E$$

オームの法則

自由空間（真空）中のMaxwellの方程式

$$rot\boldsymbol{E} = -\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$$

$$rot\boldsymbol{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

$$div\boldsymbol{E} = 0$$

$$div\boldsymbol{H} = 0$$

4つの式をE,Hに関する連立方程式として解く

ーー>波動方程式

波動方程式の導出

両辺にrot

$$rot\boldsymbol{E} = -\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \longrightarrow rot(\,rot\boldsymbol{E}) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} rot\boldsymbol{H}$$

$$rot\,(rot\boldsymbol{E}) = grad\ div\boldsymbol{E} - \Delta \boldsymbol{E} = -\Delta \boldsymbol{E}$$

$$-\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} rot\boldsymbol{H} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

$$\Delta \boldsymbol{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0$$ 波動方程式

波動方程式

$$\Delta \boldsymbol{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad \Delta \boldsymbol{H} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} = 0$$

直交座標系では

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0$$

平面波としての波動方程式の解

仮定

(1) : 波動は z方向に伝搬する

(2) : 波動はx-y平面内で一様である．

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0$$

Maxwellの方程式に戻る

$$rot\boldsymbol{E} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i}_x & \boldsymbol{i}_y & \boldsymbol{i}_z \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & E_z \end{vmatrix} = -\boldsymbol{i}_y \frac{\partial E_x}{\partial z}$$

$$= -\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = -\boldsymbol{i}_y \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}$$

$$rot\boldsymbol{H} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i}_x & \boldsymbol{i}_y & \boldsymbol{i}_z \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & H_y & 0 \end{vmatrix} = -\boldsymbol{i}_x \frac{\partial H_y}{\partial z}$$

$$= \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \boldsymbol{i}_x \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

2つの仮定の下、

電界はx成分しか持ち得ない

電磁界成分

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0$$

の3式をMaxwellの方程式に戻って調べると，

意味を持つのは

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$$

だけである．つまり電磁波は横波である．

スカラー波動方程式

$$\Delta u(x,y,z,t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \qquad \text{1次元の場合}$$

$$u(x,t) = u^+(x - vt) + u^-(x + vt)$$

定常状態での波動方程式の解

$$\Delta U(x) = -\frac{\omega^2}{v^2} U(x)$$

$$U(x) = e^{\lambda x} \qquad \lambda^2 = -\frac{\omega^2}{v^2}$$

$$k = \pm j\lambda = \pm \frac{\omega}{v} \qquad \text{波数}$$

$$U(x) = U_1 e^{-jkx} + U_2 e^{+jkx}$$

スカラー波動方程式の一般解としての平面波

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$$

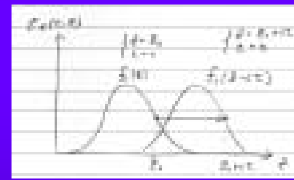
$$E_x = f_1(z-ct) + f_2(z+ct)$$

$$H_y = \frac{1}{\eta_0}\left\{ f_1(z-ct) - f_2(z+ct) \right\}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 3\times 10^8 (m/s)$$ 速度

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \cong 376.6 \cong 120\pi$$ 特性インピーダンス

波動の移動



$$E_x = f_1(z-ct) + f_2(z+ct)$$

$$z - ct = \text{constant}$$

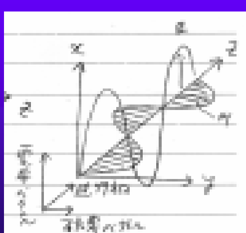
$$\text{z=constant} + c$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = c$$

電界と磁界

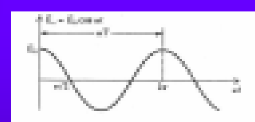
$$E_x = f_1(z-ct) + f_2(z+ct)$$

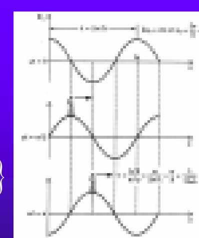
$$H_y = \frac{1}{\eta_0}\left\{ f_1(z-ct) - f_2(z+ct) \right\}$$



$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \cong 376.6 \cong 120\pi$$

時間ー空間での波動の伝搬





$$E_x(z,t) = \mathrm{Re}\left\{ \left(A_1 e^{-jkz} + A_2 e^{+jkz} \right) e^{j\omega t} \right\}$$
$$= A_1 \cos(\omega t - kz) + A_2 \cos(\omega t + kz)$$

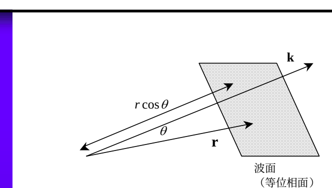
$$\omega t - kz = \text{aconstant}$$

9.2電磁波

$$\mathbf{E}(x,t) = \mathbf{e}^{(1)} E_0 \cos(\mathbf{k}\cdot x - \omega t)$$

$$\mathbf{k}\cdot x - \omega t$$:波の位相

等位相面



位相が一定値 α をとるとき、

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} = \alpha + \omega t$$

が成立する。ここで時刻 $t = t_1$ と固定したとき

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} = \alpha + \omega t_1 \qquad (2.42)$$

を満足する $\mathbf{r}$ はベクトル $\mathbf{k}$ に垂直な平面を形成する

電界の方向

$$\mathbf{E}(x,t) = \mathbf{e}^{(1)} E_0 \cos(\mathbf{k}\cdot x - \omega t)$$

を　$div\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = 0$　に代入すると

$$div\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right)$$

$$= (e_x^{(1)} k_x + e_y^{(1)} k_y + e_z^{(1)} k_z) E_0 \cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)$$

$$= -(\mathbf{e}^{(1)}\cdot\mathbf{k}) \sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t) = 0$$

これより　$\mathbf{e}^{(1)}\cdot\mathbf{k} = 0$

電磁界方向

$$div\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = -(\mathbf{e}^{(2)}\cdot\mathbf{k}) \sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t) = 0$$

$\mathbf{e}^{(1)}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{e}^{(2)}\cdot\mathbf{k} = 0$　電界、磁界は互いに直交

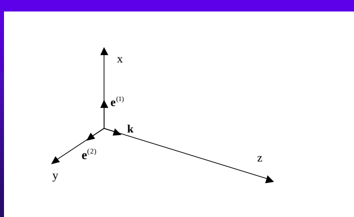
更に　$rot\boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$　より

$$H_0 \mathbf{e}^{(2)} = \mathbf{k} \times \mathbf{e}^{(1)} \frac{E_0}{\eta_0}$$

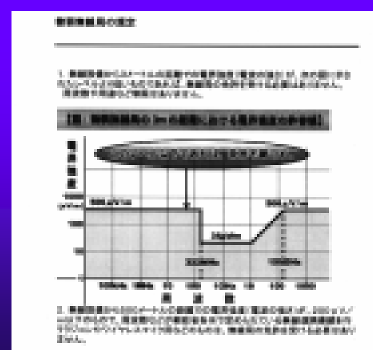
電界、磁界、進行方向が互いに直交

電界・磁界と電磁波進行方向

$\mathbf{e}^{(1)}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{e}^{(2)}\cdot\mathbf{k} = 0$　　$H_0 \mathbf{e}^{(2)} = \mathbf{k} \times \mathbf{e}^{(1)} \dfrac{E_0}{\eta_0}$



Electromagnetic Compatibility (EMC)



電磁波とスペクトラム

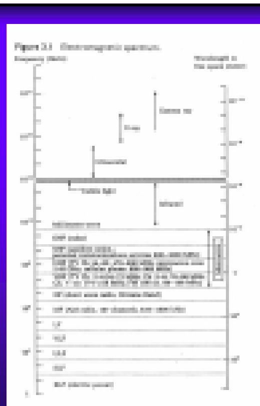


図3.5.1　電磁波の周波数スペクトル