

電磁気学 I (Electromagnetics I)

2013 年 9 月 30 日

佐藤 源之 東北アジア研究センター (環境科学専攻)

(研究室) 川北合同研究棟 213 号室 795-6075

sato@cneas.tohoku.ac.jp <http://cobalt.cneas.tohoku.ac.jp/users/sato/newpage9.htm>

月曜日 8:50-10:20 (4 セメスター) 機械知能・航空工学科 2 年生 B2、B3、C1、C2 機 4 講義室

講義の目的

- Maxwell の方程式に立脚した体系の理解
- 情報伝達・エネルギー応用・計測などで電磁気を工学的に利用するための物理現象の理解
- ベクトル数学の実践的応用
- 電磁気学による現象表現と電気回路によるモデル化の理解

教科書：電磁気学の考え方 砂川重信 岩波書店 1993

この教科書では物理学の本質的な「しくみ」と電磁気学の「体系」が詳しく述べられている。体系を明確にするために、真空中に完全導体が置かれた空間の電磁界を扱い、誘電体・磁性体などの物質と電界・磁界の関わり合いについては触れていない。これらは電磁気学の応用の上で重要な事項なのであるが、電磁気学の全体像を理解するうえでは、必ずしも必要ではない。またエネルギー利用など、具体的な工学的応用については説明していない。機械知能・航空工学科の学生の基礎科目としては習得してほしいが教科書では扱わない内容、つまり物質の関係、境界値問題などについては、適宜演習問題等で補足する。

講義予定 (変更の可能性があります。)

1. 9/30 電磁気学とはどんな学問か (高校と大学で学ぶ電磁気学の違い)
2. 10/7 ベクトル数学の復習・近接作用と静電場
3. 10/21 演習・小テスト
4. 10/28 近接作用と静電場
5. 11/11 演習・小テスト
6. 11/18 さらに静電場について
7. 11/25 さらに静電場について
8. 12/2 定常電流
9. 12/9 静磁場
10. 12/14(土) 静磁場
11. 12/16 電流にはたらく磁場の力
12. 1/6 時間的に変動する電場と磁場
13. 1/20 電磁界の基本法則
14. 1/27 電磁波
15. 2/3 電磁波の放射
16. 2/4 定期試験

講義の進め方、評価について

- 講義内容は Web で公開する。予習を前提として講義を進める。
- ベクトル数学については十分理解しているものとして講義を進める。
- 毎回指定する演習問題について次週講義開始前にレポートを提出する。レポートは一部採点評価する。
- 必要に応じて授業の始めに、指定した演習問題の中から小テストを行う。小テストは採点し返却する。
- 定期試験の評点にレポート並びに小テストの点数を加算して総合評価する。

参考書について

電磁気学の参考書は数が多く、良い本の選択は難しい。電磁気学の体系を理解するためには、多くの本を拾い読みするより 1 冊を丹念に読み通すのが良いと思う。それぞれの本が扱う内容に大差はないが説明の良し悪しは大きな差がある。演習問題は自分で解くこと。解答は自分で確認すること。

- 新しい電磁気学 太田昭男 培風館 1994 工学的応用例、演習問題が豊富。
- 電磁気学 I,II V.D.バーガー、M.G.オルソン著、小林、土佐訳 培風館 1992 明快な論理体系で説明しており、応用例、演習問題も豊富。ただし、やや難しい。
- 電磁気学ノート、続電磁気学ノート 藤田広一 1971,1978 判りやすい説明。問題を解く練習には最適だと思う。[演習シリーズもある]

ベクトル表記について

ベクトル表記 $a, b, c : \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$

面積積分 $\iint_{S_0} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{Q}{\epsilon_0}$

体積積分 $E(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} dV$

電磁気学とは何だろうか

ニュートン力学

運動の第一法則：慣性の法則

運動の第二法則：運動の法則

運動の第三法則：作用反作用の法則

に基づきすべての力学現象を説明する演繹的方法

Maxwellの方程式

$$\text{div}\mathbf{D} = \rho$$

$$\text{div}\mathbf{B} = 0$$

$$\text{rot}\mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{i}$$

$$\text{rot}\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

電気に関する法則とは：オームの法則、キルヒホッフの法則ではない。

2本線路を通過する電流は金属板にあげた穴の中を通過できない。

Maxwellの方程式がはじめにありき。境界値問題を含め、すべての電磁界現象を記述できる。

電磁気学の展開

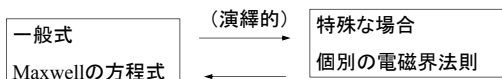
Maxwellの方程式によって境界値問題を含め、すべての電磁界現象を記述できる。しかしこれでは体系が難しすぎる。慣性の法則、運動の法則、作用反作用の法則の3法則から展開できるニュートン力学と対比的。

電磁気学の体系の中では比較的わかりやすい（力学と関係のある）静電界から始める方法が普通であるが、全体を見通すことが難しい。できるだけ横道にそれることなくMaxwellの方程式にたどりつきたい。このために物質中の電磁気学を割愛する。

高校の大学で学ぶ電磁気学の違い

- ベクトル場・ベクトル数学の応用
- 現象の一般的理解

体系が明らかになっている



(帰納的)

実験からの一般化

ファラデー、マックスウェル、アンペア

電流がつくる磁界の強さ

$$\text{rot}\mathbf{H} - \mathbf{i} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Maxwellの方程式
(広義のアンペアの法則)

$$\text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{i}$$

Maxwellの方程式
(狭義のアンペアの法則)

$$H = \frac{I}{2\pi r}$$

アンペアの法則

ファラデーの電磁誘導の法則

$$\text{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \quad V = -N\frac{d\Phi}{dt}$$

Maxwellの方程式

電磁誘導の法則

遠隔作用と近接作用

電磁気学で取得してほしい「場」の概念。

クーロンの法則

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{R^2}$$

$$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2 / \text{N} \cdot \text{m}^2$$

CD-ROM Electrostatic Charge, Coulomb's Law

ねじばかりによる実験—クーロン：直接的方法である。

キャベンディッシュによる2重球殻間の電荷移動：2乗則が成立する場合にしか説明できない！

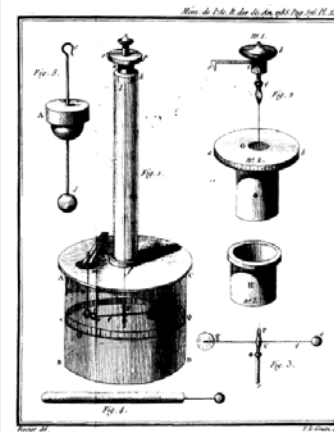
電磁気学に立脚した間接的証明、物理的意義が高い

万有引力の法則

$$F = -G \frac{mM}{R^2}$$

$$G = 6.67 \times 10^{-11}$$

近接作用による一般化—空間の歪み
エーテルの存在の否定

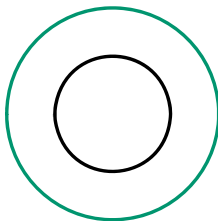


Henry Cavendish
(1731-1810)
の万有引力測定器

零位法

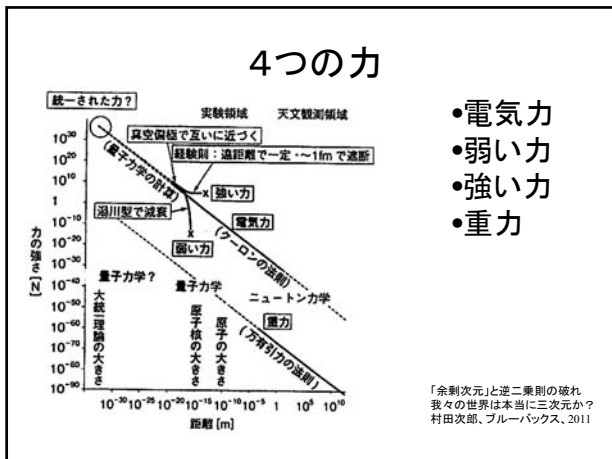
キャベンディッシュの実験

- 電気力に関する逆二乗則の実験的証明



逆2乗法則

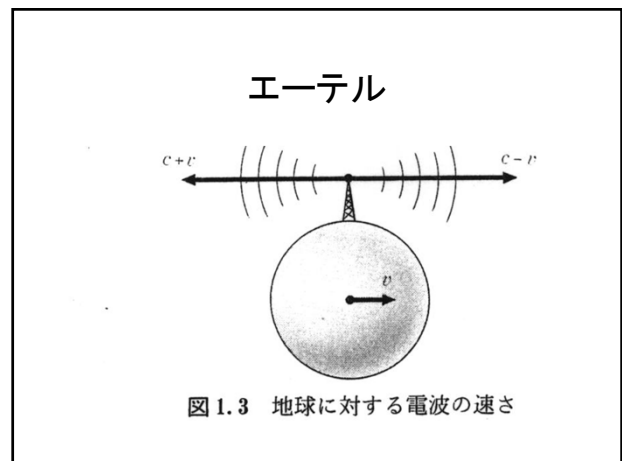
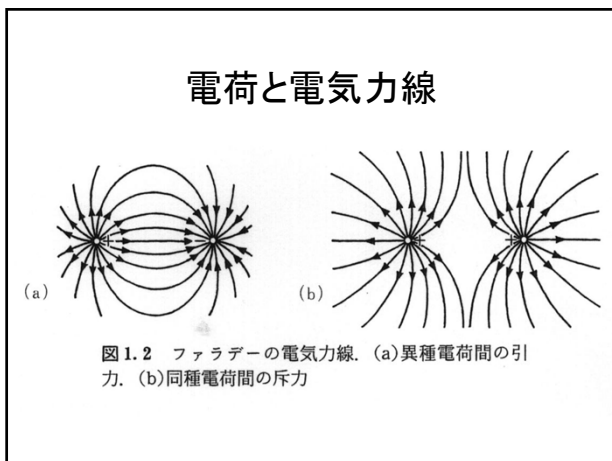
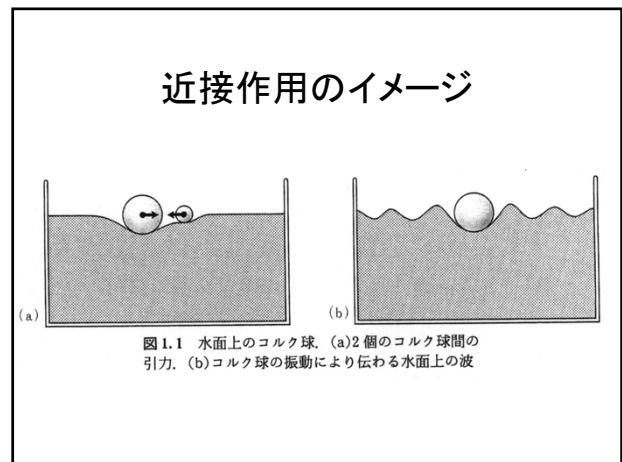
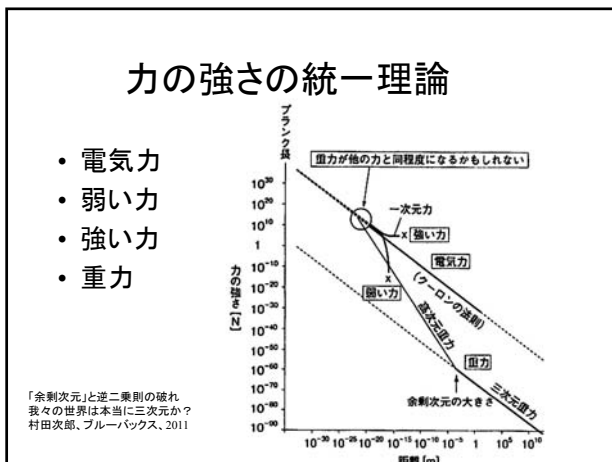
- 万有引力の法則
- クーロン(Coulomb)の法則
- 力線は空間を当方的に広がる
- 私達は3次元空間にいる
- 本当に成立するのか？
- なぜ成立するのか？
- $\frac{1}{r^n}$ 、n=2以外ではだめか



余剰次元

- 物質の速度は光速を超えない?
- ニュートリノの速度

- 「余剰次元」と逆二乗則の破れ
- 我々の世界は本当に三次元か?
- 村田次郎、ブルーバックス、2011



ベクトル数学の基礎

電磁気学で利用するベクトル演算の復習

藤田広一：電磁気学ノート コロナ社

理解しておくべき内容

1. ベクトルの線積分
2. ベクトルの面積分
3. $gradV$
4. $divD$
5. $rotH$
6. ガウス(Gauss)の法則
7. ストークス(Stokes)の法則
8. ベクトルの内積
9. ベクトルの外積

ベクトルの内積

ベクトルの内積は有効成分を表す

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{T} = |\mathbf{E}| |\mathbf{T}| \cos \theta$$



ベクトルの線積分

g :重力場

T :移動する方向の単位ベクトル

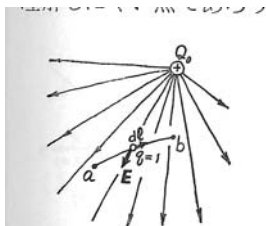
重力場内で移動する物体に対する重力の仕事



$$\int_a^b \mathbf{g} \cdot \mathbf{T} dl = \int_a^b \mathbf{g} \cdot d\mathbf{l}$$

図 2.21 微小変位ベクトル dl

電界中の電荷の運動と仕事



$$V = - \int_a^b q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

$$\mathbf{E} = -gradV$$

図 2.22 電界内の電荷の運動と仕事

gradV

$$gradV = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{k}$$

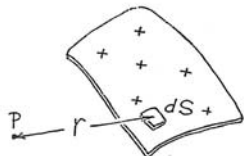
大きさはVの最急傾斜

方向は最急傾斜の方向 であるベクトル



スカラー関数の面積分

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{Q}{r} dS$$



スカラー関数の体積積分

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{Q}{r} dS$$

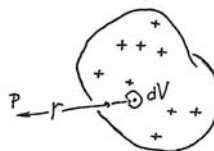
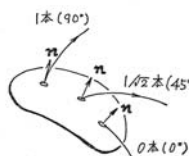


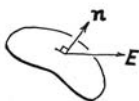
図 3-9 雲状に分布する電荷による電位

ベクトルの面積分



ベクトルは面に対して任意の方向をもつ

法線ベクトル:
Normal vector



面積分の定義

$$\iint \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS$$

閉曲面を貫く電気力線

電荷によってつくられる電界を電気力線で表現する

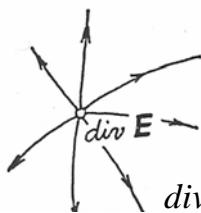


閉曲面を貫く電気力線の数を数える



divD

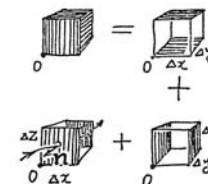
発散 (湧き出し) = (閉曲面から出る力線の総数)
(閉曲面につつまれる体積)



$$div \mathbf{D} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\iint \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS}{\Delta V}$$

divD

$$\begin{aligned} div \mathbf{D} &= \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\iint \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS}{\Delta V} \\ &= \lim_{\Delta x \Delta y \Delta z \rightarrow 0} \frac{(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}) \Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta x \Delta y \Delta z} \\ &= \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \end{aligned}$$



ガウスの法則

体積Vをとり囲む閉曲面Sについて

$$\iint_{S_0} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_V \text{div} \mathbf{D} dV$$

湧出: 発散の意味

ベクトル場

Div(泉) と rot(うず)

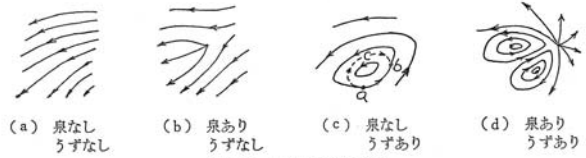


図 6.1 ベクトル場の種類

うずメータ



うずの大きさ $\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S}$

ローテーションの定義

大きさ $|\text{rot} \mathbf{H}| = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S}$



ΔS の周囲について右ネジの進む方向

$$\text{rot} \mathbf{H} = i \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + j \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + k \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}$$

ストークスの定理

閉曲線CとCに囲まれた閉曲面Sについて

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S (\text{rot} \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS$$



ガウスの法則とストークスの法則

$$\iint_{S_0} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_V \text{div} \mathbf{D} dV$$



$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S (\text{rot} \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS$$



微分形と積分形の変換

いずれも積分の次元をひとつ下げる



2 近接作用と静電場

内容

1. クーロンの法則から静電界を誘導
2. ガウスの法則(積分形)
3. ガウスの法則(微分形)

電荷がつくる静電界

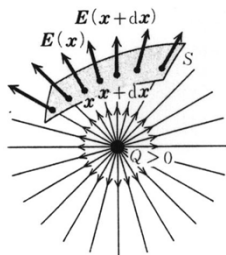
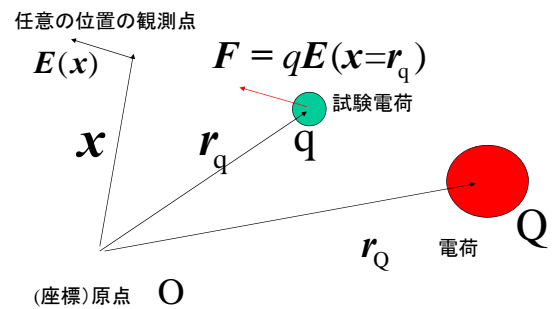


図 2.1 点電荷 Q のつくる静電場

電荷と座標



2.1 静電力と静電場

静電力の式(クーロンの法則)の分割

スカラー表現

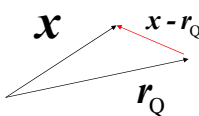
$$F = qE$$

ベクトル表現

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2}$$

$$F(r_q) = qE(x=r_q)$$

$$E(x) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x-r_Q}{|x-r_Q|^3}$$



電場・電界による場の歪表現
試験電荷がなくても電界は存在している

重ね合わせの理

- 線形性
- ベクトル表現の便利さ

$$E(x) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x-r_Q}{|x-r_Q|^3}$$

$$E(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i(x-r_i)}{|x-r_i|^3}$$

積分形

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i(\mathbf{x}-\mathbf{r}_i)}{|\mathbf{x}-\mathbf{r}_i|^3}$$

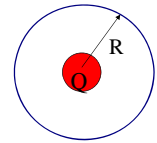
体積分布する電荷に対する表現

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3} dV'$$

ただし実際に体積積分をすることはめったにない。
よりエレガントな方法をとる。

ガウスの法則

近接作用をより明確に表現する



点電荷の周囲に球殻をおいて面積積分

$$4\pi R^2 E(R) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

点電荷から発生する円錐形状について発生する電界の積分
: 任意の表面形状について一定

$$\iint_{S_0} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \text{:一般形}$$

閉曲面と電気力線

点電荷から見た、ある立体角の中の電気力線の数は一定。
この立体角を横切る任意の曲面を貫く力線の数も一定。

$$\iint_{S_0} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

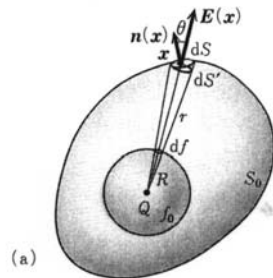
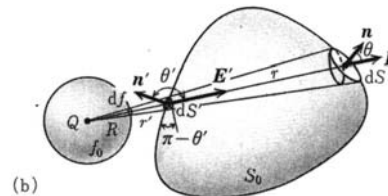


図 2.2 ガウスの法則

内部に電荷をもたない閉曲面

内部に電荷をもたない閉曲面について表面積分は常に0

$$\iint_{S_0} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$



(b)

多数の電荷について重ね合わせ

$$\iint_{S_0} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum Q_i = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho(\mathbf{x}) dV$$

これらをすべて包括する: 積分形のガウスの法則

$$\iint_{S_0} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint \rho(\mathbf{x}) dV$$

ただし $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ 真空中での電束密度の定義

連続分布する電荷に対するガウスの法則

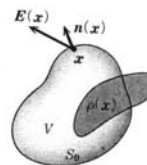


図 2.3 連続的に分布する電荷の場合のガウスの法則

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$$

$$\iint_{S_0} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint \rho(\mathbf{x}) dV$$

球状電荷のつくる電界

例題1 ガウスの定理積分系から電界を求める

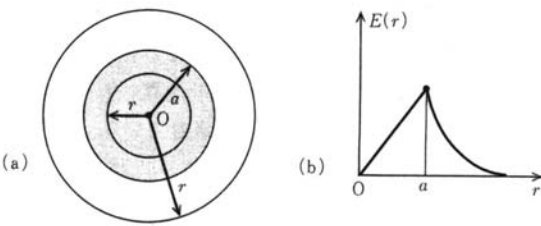


図 2.4 球状電荷のつくる静電場. (a)球状電荷とガウスの法則. (b)球内外の静電場の大きさ

微分形のガウスの法則

ベクトル公式 $\iint_{S_0} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_V \text{div} \mathbf{D} dV$ 湧出: 発散の意味

$\iint_{S_0} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint \rho(\mathbf{x}) dV$ ガウスの法則積分形

$\text{div} \mathbf{D}(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})$ ガウスの法則微分形

ガウスの方程式と近接作用

$\text{div} \mathbf{D}(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})$

$\epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial x} = \rho$ 1次元の場合

$E_x(x + \Delta x) = E_x(x) + \frac{\rho(\mathbf{x}) \Delta x}{\epsilon_0}$

隣接する場所の電界が関係しあう

2.3 静電ポテンシャル

$\mathbf{F} = -\text{grad} V$

力学系で \mathbf{F} が力、 V がポテンシャル

$V = -G \frac{mM}{r}$ 万有引力

$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, F_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$

$\mathbf{F} = -\text{grad} V$

原点にある点電荷がつくる電界

$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$ を成分ごとに書き下すと

$E_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{|\mathbf{r}|^3}, E_y = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{|\mathbf{r}|^3}, E_z = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{|\mathbf{r}|^3}$

ここで $|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

静電ポテンシャルの定義

$E_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{|\mathbf{r}|^3}, E_y = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{|\mathbf{r}|^3}, E_z = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{|\mathbf{r}|^3}$ を利用して

$\phi(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r}|}$ として静電ポテンシャルを定義すれば

$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\text{grad} \phi(\mathbf{x})$

として、電界を表現することができる。
上式は重ね合わせの理より、いかなる電荷分布でも成立する

$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV$

静電ポテンシャルのメリット

直接の動機:

ベクトルの代わりにスカラーで電界を表現したい

より深い理由:

ポテンシャルの利用により電磁界の原因とそれから作られる電磁界の関係を一般的に明瞭にできる

保存場の性質

位置ポテンシャル

等高線の地図から勾配を一意に決めることができる

$$V = \oint \mathbf{E} dl = \iint \text{rot} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \iint \text{rot}(-\text{grad} \phi) \cdot \mathbf{n} dS \equiv 0$$

$$\text{rot}(\text{grad} \Phi) = 0$$

$$\text{div}(\text{rot} \mathbf{A}) = 0$$

ベクトル公式

電界の閉曲線の沿う線積分

任意の閉曲線に沿った積分について次式が成立

$$\oint_{C_0} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0$$

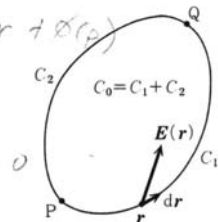


図 2.6 静電場の線積分

保存場としての電界

$$\oint \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0$$

に対してベクトル公式(ストークスの定理)を利用すれば

$$\oint \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \iint \text{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

$$\text{rot} \mathbf{E}(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{保存場の定義}$$

電界の線積分

$$\text{grad} \Phi = r \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \theta \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + j \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi}$$

$$d\mathbf{r} = \mathbf{i}_x dx + \mathbf{i}_y dy + \mathbf{i}_z dz \quad \text{より}$$

$$\int_P^Q \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = - \int_P^Q \text{grad} \phi \cdot d\mathbf{r} =$$

$$- \int_P^Q \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz \right) = \int_P^Q d\phi = \phi(P) - \phi(Q)$$

電界の線積分が積分の始点と終点の静電ポテンシャルだけで規定され、積分経路に依らないことを表している。

球状電荷による静電ポテンシャル

$$\text{grad} \Phi = r \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \theta \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi}$$

球座標系における勾配(Gradient)

球対称なら

$$E_r(\mathbf{r}) = -\text{grad} \phi(\mathbf{r})|_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r}$$

$$\phi(r) - \phi(\infty) = - \int_{\infty}^r E_r(\mathbf{r}) dr$$

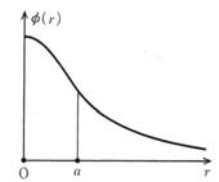


図 2.8 球状電荷による静電ポテンシャル

電磁気学 演習問題

- [1] 真空中に 1m 離れて $10^{-6}[\text{C}]$ の電荷と $10^{-7}[\text{C}]$ の電荷とがある。両電荷間に働く力を求めよ。
- [2] 真空中に 1m 離れて相等しい電荷がある。その間に次のような力が働く場合、電荷の大きさは何クーロンか。
 (a) 1N
 (b) 1kg の質量に働く重力に等しい力
 (c) 100kg の質量に働く重力に等しい力
- [3] $-Q_1$ 真空中の中で一直線上に間隔 $a [\text{m}]$ を隔てて $Q_1, Q_2, Q_3 [\text{C}]$ の電荷が存在している。それぞれの電荷に働く力を求めよ。ただし、力の向きは Q_3 より Q_1 に向かう力を正とする。

[4] 問題 3 で a, Q_1, Q_2, Q_3 が次の値を有する場合を計算せよ。

(a) $a = 10\text{cm}, Q_1 = Q_2 = 5 \times 10^{-6} \text{C}, Q_3 = -5 \times 10^{-6} \text{C}$

(b) $a = 10\text{cm}, Q_1 = Q_3 = 5 \times 10^{-6} \text{C}, Q_2 = -5 \times 10^{-6} \text{C}$

[5] 質量 m , 電荷 Q を持つ小さな物体 2 個を、それぞれの長さ a の絶縁系で同一の点から吊るしたとき、糸の鉛直に対する傾きが θ となったという。このとき次の関係が成立することを証明せよ。ただし、糸の重量は無視するものとする。

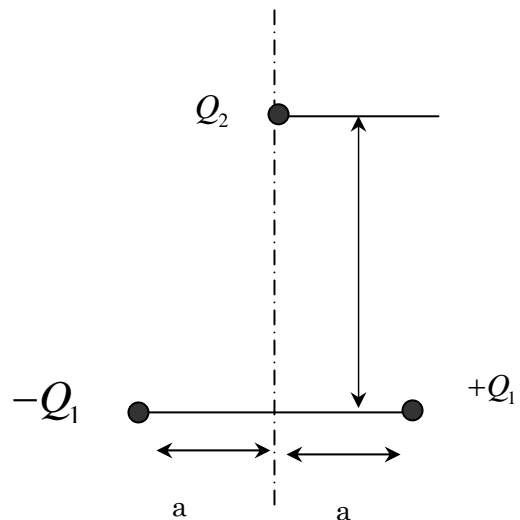
$$16\pi\epsilon_0 m g a^2 \sin^3 \theta = Q^2 \cos \theta$$

[6] 問題 5 において $m=1\text{g}$, $a=50\text{mm}$ なるとき

(a) $\theta = 10^\circ$ のときの Q を求めよ。

(b) $\theta = 45^\circ$ のときの Q を求めよ。

[7] 図に示すように、長さ $2a$ の絶縁物の様の両端にそれぞれ $+Q_1$ および $-Q_1$ の点電荷がある。棒の垂直二等分線上に点電荷 Q_2 がある。棒に働くトルクを求めよ。



[8] 次のスカラー関数の勾配を求めよ。

(a) $f(x, y, z) = 3x^2y - y^3z^2$

(b) $f(x, y, z) = \frac{b}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{c}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}}$

[9] $V(x, y, z) = 2xz^4 - x^2y$ のとき $\mathbf{E}(x, y, z)$ および点 $(2, -2, 1)$ における $|\mathbf{E}|$ を求めよ。ただし

$\mathbf{E} = -\text{grad}V$ を使え。

[10] $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ とするとき、以下の間に答えよ。

(1) $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right)$

(2) $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right)$

(3) $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r} \right)$

(4) $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{r} \right)$

(5) $\frac{\partial}{\partial x} (\log r)$

(6) $\frac{\partial}{\partial y} (\log r)$

[11] $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, |\mathbf{r}| = r \neq 0$ のとき

$$\text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

であることを証明せよ。

ベクトルの勾配に関する公式。ただし f, g は関数、 c を定数とする。

$$\text{grad}(f + g) = \text{grad}f + \text{grad}g$$

$$\text{grad}(cf) = c\text{grad}f$$

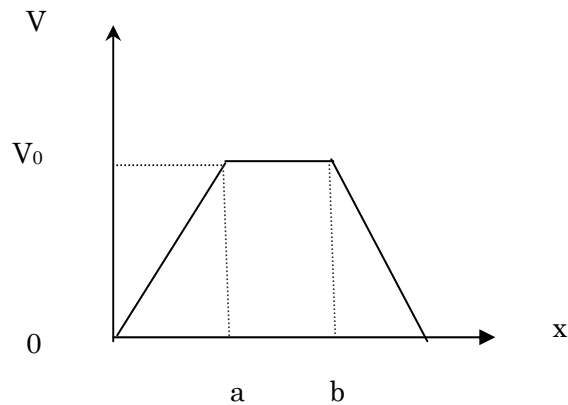
$$\text{grad}(fg) = (\text{grad}f)g + f(\text{grad}g)$$

$$\text{grad} \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{(\text{grad}f)g - f(\text{grad}g)}{g^2}$$

[12] 1 辺の長さが 10cm である正方形の頂点 A、B、C、D にそれぞれ $+4 \times 10^{-7}$, -1×10^{-7} , $+3 \times 10^{-7}$, -6×10^{-7} [C] の電荷をおくとき、正方形の中心における電位を求めよ。

[13] 1 辺の長さが 10cm である正方形の頂点 A、B、C、D に $+2 \times 10^{-7}$ [C] の電荷をおくとき、辺 AB の中点 M、正方形の中心 O における電位および電界の強さを計算せよ。また $+5 \times 10^{-6}$ [C] の電荷を O から M までにはこぶのに必要な仕事を求めよ。

[14] 図は x 軸に沿って電位が変化する状態を表している。電界の x 成分 E_x を x 軸に沿ってプロットせよ。また、 E_x 対 x に対して得られる 2 つの面積が、等しい大きさをもたなければならない理由を説明せよ。



[15] 相等しい正の電荷 q をもつ 2 つの導体球 A、B が 10cm へだてておかれているとき、A 球のかわりに $2q$ なる正または負の電荷をもつ導体球 C を A、B を結ぶ直線上のどの点におけば、B 球に作用する力は、A 球のときと向きを含めて等しくなるか。

[16] 真空中に 10^{-6} [C] の点電荷がある。この点電荷から (a) 1cm, (b) 5cm, (c) 10cm, (d) 50cm, (e) 1m の点の電界を求めよ。

[17] 真空中にそれぞれ 6×10^{-8} [C] と -12×10^{-8} [C] とを持つ 2 個の点電荷が 10cm 離れて存在している。

- (a) 2 電荷の中点の電界の大きさを求めよ。
- (b) 電界の強さ零の点を求めよ。

[18] ABCD は真空中の長方形の頂点である。辺 AB と CD とは 0.3m, BC と DA とは 0.4m である。A および C に -10^{-7} [C], B および D に 10^{-7} [C] の電荷を置いた。(a) 長方形の中心、および (b) BC の中点における電界を求めよ。

[19] 直径 100mm の導体球に $5 \times 10^{-7} [C]$ の電荷が与えてある。

- (a) 表面の電荷密度, (b) 導体表面の電界の強さ,
 (c) 導体から 5 cm 離れた点の電界, (d) 導体の電位を求めよ。

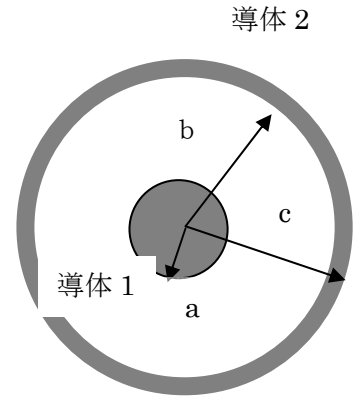
[20] 直径 100mm の導体球の表面の電界の強さが 3kV/mm である。球の電位を求めよ。

[21] 図は 2 個の同心球である。

(a) 導体 1 の電荷 Q 、導体 2 の電荷零のときの各部の電界および各導体の電位を求めよ。

(b) 導体 1 の電荷零, 導体 2 の電荷 Q のときの各部の電界および各導体の電位を求めよ。

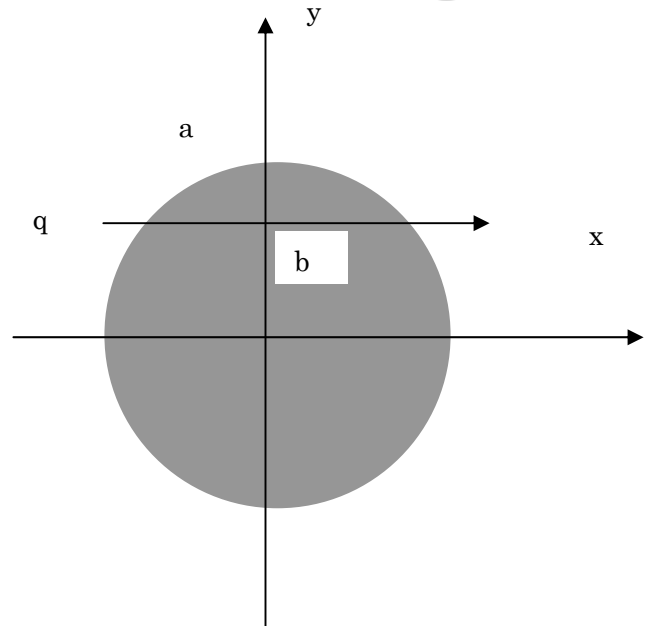
(c) 導体 1 の電荷 Q , 導体 2 の電荷 $-Q$ のときの各部の電界および各導体の電位を求めよ。



[22] 内球の半径 r_1 外球の半径 r_2 なる同心導体球

殻の外球の外面に電荷 Q を与えたい。内球の電位を V にするには、内球にいくらの電荷を与えればよいか。

[23] 半径 a の球内に Q なる電荷が一様に分布している。いま、図に示すように球の中心から距離 b だけはずれて、点電荷 q が直線的にゆっくり移動するとき、この点電荷に働く力を求め図示せよ。



[24] 次のベクトル場の発散を求め、点 $(1, -1, 1)$ における値を求めよ。

(a) $A(x^2 + yz, y^2 + zx, z^2 + xy)$

(b) $B(2x^2z, -xy^2z, 3yz^2)$

[25] ベクトル場 $A(x + 3y, y - 2z, x + az)$ の発散が 0 になるように定数 a を求めよ。

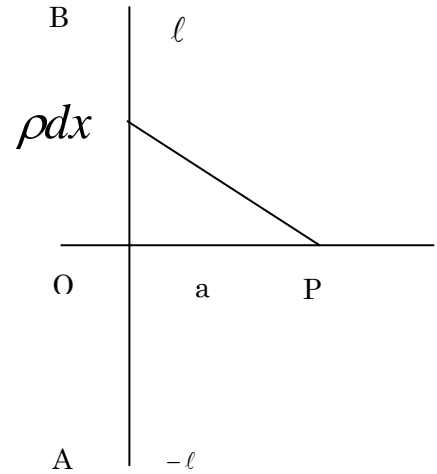
div に関する公式

$$\text{div}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{div}\mathbf{A} + \text{div}\mathbf{B}$$

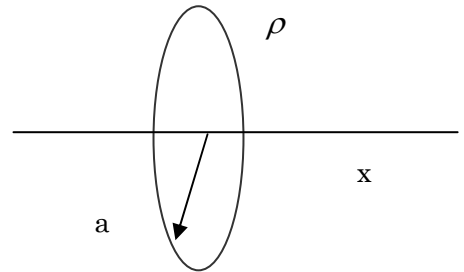
$$\text{div}(k\mathbf{A}) = k\text{div}\mathbf{A}$$

$$\text{div}(f\mathbf{A}) = (\text{grad}f) \cdot \mathbf{A} + f(\text{div}\mathbf{A})$$

[26] 長さ $2l$, 線電荷密度 ρ なる直線状電荷 AB の中点 O を通り, これに垂直な平面上の任意の点 P における電位 V を計算せよ。



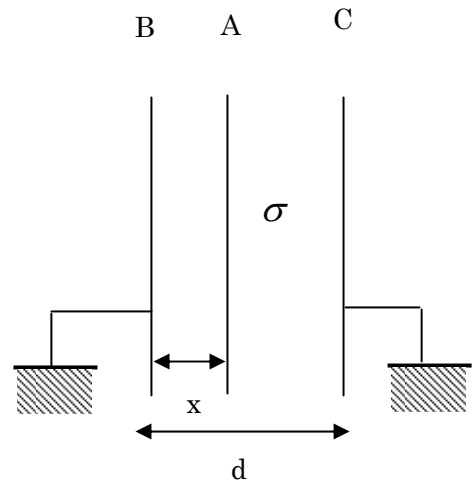
[27] 半径 a , 電荷密度 ρ なる円板状の電荷による, 中心軸上の電位 $V(x)$ を求め, 図示せよ。また電界 $E(x)$ を求め, 図示せよ。



[28] 一様に帯電した無限平板から距離 a にある点 P に生ずる電界の強さのうち, 半分は P から $2a$ なる距離内にある平板上の電荷によって生じ, 残りの半分は残りの全部の電荷によって生ずるものであることを証明せよ。

[29] 図において, B, C は接地された無限に広い導体, A は面積密度 σ の電荷である。

- (a) 各部の電界を求めよ。
- (b) B, C 表面に現れる電荷を求めよ。
 x の関数としてこの電荷を図示せよ。



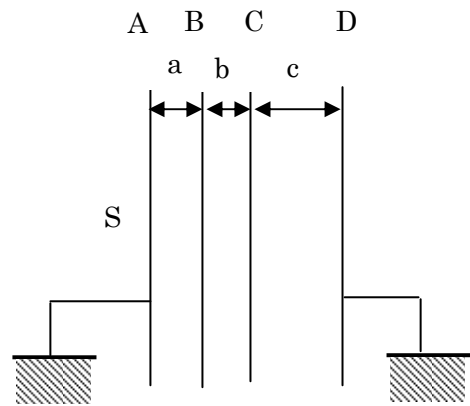
[30] 半径が a である導体球の静電容量を求めよ。

[31] 内外半径がそれぞれ r_1, r_2 である同心導体球の電位係数を求めよ。また、それぞれ電位 V_1, V_2 を与えたときに生ずる電荷 Q_1, Q_2 を求めよ。

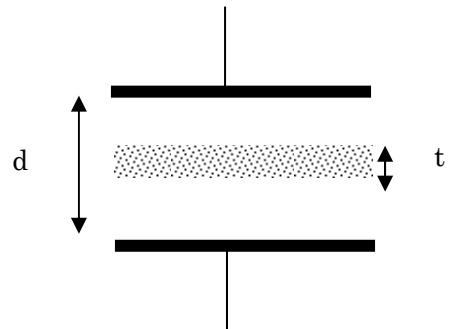
[32] [31] において外球を接地したときの静電容量を求めよ。

[33] 内球の半径が r_1 、外球殻の内外半径がそれぞれ r_2, r_3 である同心導体球の内球または外球を接地した場合の静電容量を求めよ。

[34] 面積 S なる 4 枚の等しい導体板 A, B, C, D が互いに平行におかれている。A, D を接地し、B に電荷 Q 、C に電荷 Q' を与えたときの B, C の電位を求めよ。ただし、導体板の間隔は図に示す a, b, c とする。



[35] 間隔 d なる大きな平行導体板コンデンサの両極間に厚さ t なる導体板を極板に平行に挿入したとき、このコンデンサの静電容量はどれだけ変化するか。



[36] 容量 C_1, C_2 の互いに隔離した 2 つの導体に、それぞれ電荷 Q_1, Q_2 を与えた後、両者を導線で接続するとき、移動する電荷量および接続後の電位はいくらか。

演習問題（定常電流界）

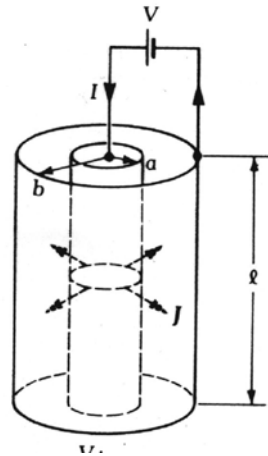
[37] 十分広い面積 S なる平行金属板に導電率 σ の均質媒質が充填されている。金属板に電圧 V が印加されたときの媒質中の電界分布、電位分布を図示せよ。

[38] 導電率 σ の均質媒質中に半径 a なる導体球が存在している。この導体球に絶縁された導線から定常電流 I が流し込まれている。

- (a) 導体周囲の電位分布を求めよ。
- (b) 導体周囲の電流分布、電界分布を求めよ。

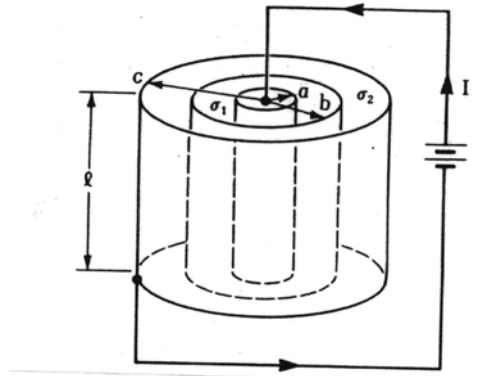
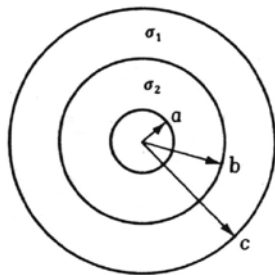
[39] 同軸状円筒導体に直流電圧 V を印加したとき定常電流 I が流れた。同軸間には均質な媒質（導電率 σ 、誘電率 ϵ ）が充填されている。

- (a) 導体周囲の電位分布を求めよ。
- (b) 導体周囲の電流分布、電界分布を求めよ。
- (c) 長さ l の導体の抵抗を求めよ。
- (d) この導体をコンデンサと見なして静電容量を求めよ。



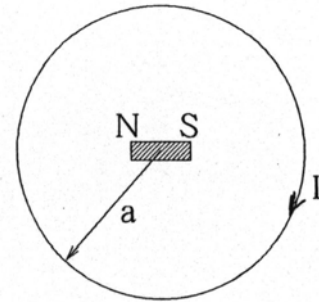
[40] 2重同軸状円筒導体に図に示すように2種類の均質な導電性媒質が充填されている。内導体から外導体へ定常電流 I を流す。

- (a) 導体周囲の2媒質中での電位分布を求めよ。
- (b) 導体周囲の2媒質中での電流分布、電界分布を求めよ。
- (c) 長さ l の導体全体の抵抗値を求めよ。



演習問題 静磁界

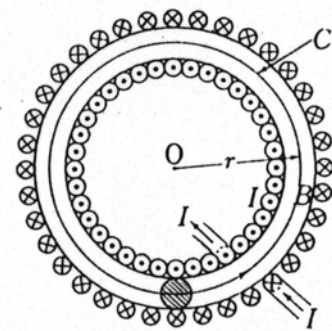
[4 1] 図において、半径 a の円形コイルの面が地球磁界の方向に平行になるように立てる。このコイルに電流 I を流したとき、その中心にある磁心 NS の振れ θ を求めよ。ただし、コイルの巻数を N 、地球磁界の水平成分の磁束密度を B とする。



問 41 円形コイル

[4 2] 図のような無端ソレノイド（トロイダルコイル）がある。円環中心線の半径 $r=30\text{mm}$ 、巻数 $N=1000$ とする。これに、それぞれ電流 $I=10\text{mA}$ 、 500mA 、 1A を流したときの円環中心線上の磁束密度を求めよ。

[4 3] 図のような二つのコイルにおのおの電流 I を流したときの中心線上の磁束密度を求めよ。中心 O における磁束密度を 1 としてこれをプロットせよ。



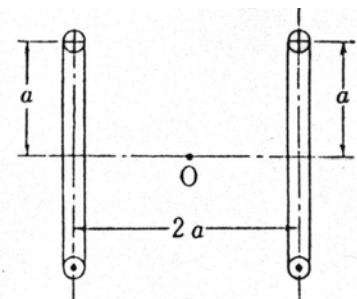
問 42 無端ソレノイド

[4 4] 1 辺 a の正方形の導線に電流を流すとき、正方形内の磁束密度を求めよ。

[4 5] 1 辺 a の正方形の導線に電流 I を流すとき、中心軸上の磁束密度を求めよ。

[4 6] 半径 a の円形コイルの中心軸上の磁束密度を $x=-\infty$ から ∞ まで積分してアンペアの周回積分の法則が成り立つことを検証せよ。

[4 7] 半径 a である円に内接する正 n 角形回路にそって流れる電流 I によって、その中心に生ずる磁界を求めよ。

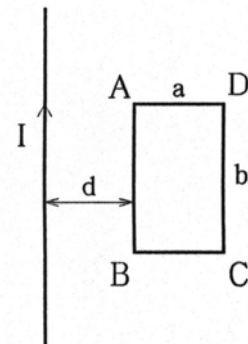


問 43 2つのコイル

[4 8] 図のように無限長線電流 I が流れている。いま一辺が I に平行な長方形 $ABCD$ を通る全磁束を求めよ。ここで長方形の位置および大きさは図に示す通りとする。

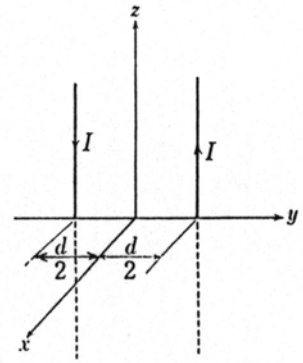
[4 9] 半径 a および b ($a < b$) の二つの共軸の導体円筒面がある。二つの円筒面の上を同じ大きさ I で反対向きの電流が軸方向に流れるとき、いかなる磁場ができるか。ただし、円筒は軸方向には十分長いとする。

[5 0] 厚さが $2t$ である無限にひろい導体内を板にそって一定方向に一様に流れる、電流密度 J なる電流によって、導体坂内外に生ずる磁界の強さを求めよ。



問 48 無限長電流

[51] 図のように 2 本の平行な導線に大きさが等しく、方向が反対の電流 I が流れている。磁界のベクトルポテンシャルを求めよ。ただし、導線の長さは無限とする。



[52] a, b, B_0 を定数とするとき、ベクトルポテンシャルの各成分が

$$A_x = -\frac{a}{a+b} B_0 y, A_y = \frac{a}{a+b} B_0 x, A_z = 0$$

であったという。このときの磁束分布を求めよ。

[53] $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ とするとき

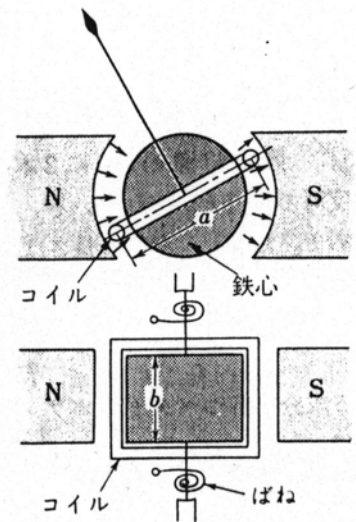
$$A_x = A_y = 0, A_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \log \frac{r}{a}, (r > a)$$

$$A_x = A_y = 0, A_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\frac{r^2}{a^2} - 1 \right), (r < a)$$

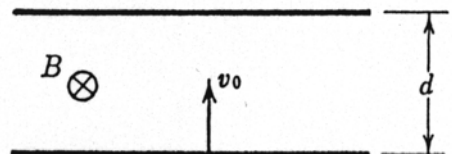
なるベクトルポテンシャルがある。磁界分布および電流分布を求めよ。ここに I, a は定数である。

[54] 2 cm の間隔を持つ 2 本の平行な導線に、それぞれ 1000A を流すとき、その 1m あたりに働く力を求めよ。

[55] 図は直流電流計の原理図である。磁石と鉄心とを組み合わせ、ギャップに一樣な磁界を作るようにし、この磁界の中にコイルを入れる。コイルに生ずるトルクとばねの力とつりあう角度から電流の大きさを読み取る。コイルの巻数 N 、磁束密度 B 、コイルの電流 I のときのトルクを求めよ。



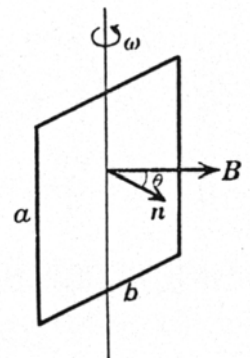
[56] 真空中において、図に示すように間隔 d の平行電極板があり、紙面に垂直に磁束密度 B の磁界があるいま、一方の電極から電極に垂直に初速度 v_0 で対極に向かって電子が飛び出すとするとこの電子が対極に達し得ないためにはどのような条件が必要か。



[57] ϕ をスカラとするとき $rot(grad\phi) = 0$ なることを示せ。

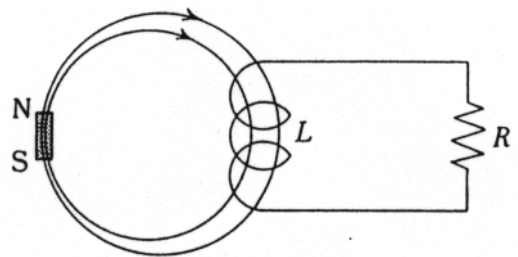
[58] 磁束密度が \mathbf{B} である平等磁界のなかで図のように辺の長さが a, b である

長方形回路が磁界の方向に直角な中心軸のまわりに角速度 ω で回転しているとき、この回路に誘起される起電力を求めよ。



[59] 図のように一つのコイル L のそばに永久磁石

NS があり Φ_0 だけの磁束がコイルと鎖交しているとす。いま、磁石を十分遠方に遠ざけるときに、抵抗 R の中を通過する全電荷量を求めよ。



[60] [59]において L をコイルの自己インダクタンスとする。いま、磁石がつくる磁束 Φ が指数関数的に減少し、 $\Phi = \Phi_0 e^{-at}$ で表されるとするとき、以下を求めよ。

- (a) 流れる電流
- (b) 抵抗で熱となる全エネルギー
- (c) 電流の最大値

[61] 透磁率 μ 、導電率 σ である十分長い円筒状は磁性体の中心的方向に磁界を加えてこれを dH/dt で増加させるとき、磁性体の中の電流密度を求めよ。ただし電流のつくる磁界は無視できるものとする。

[62] 磁束密度 \mathbf{B} の平等磁界と平行な中心軸のまわりに角速度 ω で回転する半径 a の導体円盤がある。これに抵抗 R を図のように接続するとどれだけの電流が流れるか。

